

Problemis inviers par nanostruturis

ANTONINO MORASSI *

Ristret. In cheste rassegne o esaminìn cualchi risultât resint pai problemis inviers relatîfs aes nanostruturis elastichis sutilis. Lis nanostruturis a son consideradis unidimensionâls (nanotrâfs) o bidimensionâls (nanoplachis) e a son descritis intal ambit di une version semplificade de teorie de elasticitât lineâr cun gradient di deformazion par materiâi isotrops. Un prin grup di risultâts al rivuarde l'ûs des nanotrâfs tant che sensôrs di risonance di masse par identificâ une densitât di masse zontade no cognossude par mieç de misurazione di un numar finît di frecuencis di risonance. Intal secont grup di risultâts, o determinìn stimis costrutivis dal alt e dal bas de aree di une inclusion elastiche no cognossude pussibilmentri presint intune nanoplache, esprimudis in tiermins di lavôr esercitât di cjamps di fuarce e di moment aplicâts al contor de nanoplache.

Peraulis clâf. Nanotrâfs e nanoplachis, sensôr di masse, problemis inviers dai autovalôrs cun dâts finîts, stimis de grandece di inclusions in nanoplachis.

1. Introduzion. In cheste rassegne o esaminarìn cualchi probleme inviers relatîf aes nanostruturis.

La sezion 2 e je dedicate ae introduzion di modei mechanics par nanotrâfs e nanoplachis intal contest de teorie de elasticitât par materiâi cun gradient di deformazion isotropic in deformazion infinitesimâl. I modei a son dedusûts in maniere formâl tacant de formulazion tridimensionâl debile dal probleme e specializant l'insiemi des configuracions amissibilis dal pont di viste cinematic daûr des ipotesis di Eulêr-Bernoulli pes nanotrâfs e des ipotesis di Kirchhoff-Love pes nanoplachis.

Tal paragraf 3 o frontìn il probleme inviers ponût dal ûs di une nanotrâf uniforme tant che sensôr di masse. Il rilevament de masse

* Dipartiment Politecnico di Ingegneria e Architetture, Università del Friuli, Udin, Italie.
E-mail: antonino.morassi@uniud.it

si fonde su la misurazione des variacions de frecuece di risonance causadis de masse tacade a une nanotrâf su lis primis frecuencis naturâls des vibrations assiâls o di flession. Chest al è un probleme inviers dai autovalôrs cun dâts finîts, caraterizât di patologjiis matematichis che a rindin une vore complesse la sô analisi e risoluzion. Il nestri metodi di ricostruzion si base suntune procedure iterative che e prodûs une aprossimazion de densitât di masse discognossude come serie troncade gjeneralizade di Fourier, cun coeficients che a son calculâts su la fonde dai autovalôrs misurâts. A poie de teorie si presentin simulazions numerichis e verifichis sperimentâls.

Un probleme diagnostic inte elastostatiche des nanoplachis al è frontât tal paragraf 4. Ta chest paragraf, o calcolìn il probleme di determinâ, drenti di une nanoplache isotrope elastiche in flession cun cundizions al contor di Neumann, la presince pussibile di une inclusion costituide di materiâl elastic diviers. Sot di ipotesi a priori adeguadis su la inclusion discognossude, o furnin stimis cuantitativis dal alt e dal bas de aree dal difiet discognossût, in tiermins di lavôr esercitât dai dâts al contor quant che la inclusion e je presinte e quant che e je assente. In chest contest, l'acent al sarà metût suntune schirie di struments cuantitatîfs origjinâi di continuazion uniche pal operadôr elitic di sest ordin che al guvierne la nanoplache in flession.

Nus pâr oportun zontâ cualchi osservazion su la impostazion che o vin dât a chest contribût. O vin preferît presentâ une tratazion il plui pussibil complete e autonome, tacant dal model mecanic, includude la formulazion dal probleme inviers e la sô soluzion e, quant pussibil, anje lis verifichis numerichis e sperimentâls. Tignint cont dai limits di spazi, cheste siele e à compuartât cence fal cierts disavantaçs. Par esempi, cierts risultâts a son dome enunziâts e ciertis dimostrazions a son dome aboçadis. No vin in ogni câs nissun dubi che il letôr interessât al varà mût di cjetâ ducj i details necessaris intai articui origjinâi.

I risultâts presentâts in chest lavôr a nassin intune rêr di colaborazions e o desideri ringraciâ ducj i amîs e i coleghis che cun lôr o ai vût il privileç e la oportunitât di colaborâ. O volarès scomençâ ringraciant José Fernández-Sáez (Pepe) e Ramón Zaera (Universidad Carlos III de Madrid), che mi àn invidât e stiçât a lavorâ su lis nanostruturis, intun cun Lourdes Rubio e Antonio Loya. O volarès po dopo ringraciâ, in ordin alfabetic rigorôs, come che ur plâs ai matematics, - Giovanni

Alessandrini (Universitât di Triest), Alexandre Kawano (Universidade de São Paulo, in Brasîl), Edi Rosset e Eva Sincich (Universitât di Triest), Sergio Vessella (Universitât di Florence) pai tancj agns di colaborazion stimolante. Di lôr o ai imparât e o continui a imparâ tant. Un ringraziament sclet al va ancje ai coleghis plui zovins e entusiascj: Michele Dilella e Marta Fedele Dell'Oste (Universitât di Udin). In ultin, o vuest dedicâ chest lavôr al gno cjâr amî Pepe, che nus à lassâts masse adore.

2. Modei di nanostruturis in elasticitât lineâr cun gradient di deformazion

2.1 Introduzion. Intai ultins decenis, lis struturis inzegneristichis a son stadis ridotis a dimensions cetant piçulis, rivant ae scjale micrometriche ($1\text{ }\mu\text{m} = 10^{-6}\text{ m}$) e fintremai ae scjale nanometriche ($1\text{ nm} = 10^{-9}\text{ m}$). La misure tipiche L des nanoplachis, par esempi, e je ator di $100 \div 1000\text{ }\mu\text{m}$ ($0.1 \div 1\text{ mm}$), o fintremai mancul, cun spessôr $h \simeq L/20 \div L/10$.

Lis peliculis sutilis su scjale micrometriche a son dopradis une vore in inzegnarie pes lôr proprietâts eletrichis, otichis e di durece e resistance ae corosion. A son presintis intai dispositîfs eletronicis, tes lints dai ocjâi e tes machinis. I sistemis microeletromecanics e nanoeletromecanics a son creâts par sondâ superficiis, studiâ celulis e neurons, movi microlitris di fluïts, deviâ fotons inte optoeletroniche. Altris aplicazions dai sensôrs a son il rilevament di gas, la diagnosi precoce di malatiis, il rilevament di mutazions gjenetichis e il secuenziament dal DNA.

Chestis struturis di piçulis dimensions a àn composizion e forme di tràfs sutîi o lastris sutilis. A resistin a cjamis statichis e dinamichis e, inte plui part dai câs, si deformin in maniere elastiche. Lis lôr dimensions a son tal ordin dai microns e dai nanometris e in chest lavôr a saran definidis come nanostruturis.

Par previodi la deformazion des nanostruturis e je stade doprade la elasticitât lineâr convenzionâl, ma, benzà dai agns 90 dal Nûfcent, in tancj experiments condots in variis cundizions di deformazion a son stâts segnalâts fenomens dipendents des dimensions; che si viodi, par esempi, la rassegne di Fleck a Hutchinson (1997). Inte flession e inte vibrazion libare des nanotrâfs, par esempi, lis deflections previodudis des teoriis classichis a son plui grandis, intant che lis frecuencis naturâls a son plui bassis di chês misuradis intai experiments. Stant che lis teoriis convenzionâls de elasticitât no àn parametris di scjale di lungjece dal materiâl, chestis a son inadatis a sclâr i efîets de dimension. Si che duncje, a son stadis disvilupadis teoriis di ordin superiôr cun ecuazions costitutivis che a contegnin no dome i parametris classics dal materiâl, ma ancje parametris zontâts di scjale di lungjece dal materiâl. O riclamìn, tra chês altris, lis teoriis gjenerâls pai materiâi cun microstrutture elaboradis di Toupin (1962, 1964) e di Mindlin e dai siei colaboradôrs (Mindlin e Tiersten, 1962; Mindlin, 1964, 1965; Mindlin e Eshel, 1968).

Il fin di cheste rassegne al è chel di riviodi in curt lis ecuazions constitutivis de elasticitât lineâr cun gradient di deformazion e di introdusi modei mechanics semplics di nanotrâfs e nanoplachis, che intai paragrafs sucessîfs a saran adotâts par analizâ problemis inviers specifics su lis nanostruturis. In particulâr, si concentrarin sui materiâi isotrops intal ambit de teorie di Mindlin.

2.2 Materiâi elastics lineârs cun gradient di deformazion. O premetìn cualchi note. Cun $\{O, X_1, X_2, X_3\}$ o indichìn un sisteme di riferiment Cartesian in $\mathbb{R}^3$ cun base canoniche $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ e $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, dulà che δ_{ij} al è il delta di Kronecker's. Achì, $\cdot$ al indiche il prodot scalâr in $\mathbb{R}^3$, o sedi $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$ par ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, e $\times$ al è il prodot vetoriâl in $\mathbb{R}^3$, o sedi $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \delta_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k$, dulà che δ_{ijk} al è il simbul di Ricci. Di chi indenant, la sume dai indiçs ripetûts e je assumude in maniere implicite. Lis primis derivadis parziâls $\partial f / \partial x_i$ de funzion f a son indicadis cun $f_{,i}$, e chel istes pes derivadis di ordin superiôr.

E sedi B une configurazion di riferiment naturâl di un solit continui, dulà che B al è identificât cuntun sotinsiemi viert, limitât e conetût di $\mathbb{R}^3$, che al à un contor regolâr ∂B che al permet la aplicazion de integrazion par parts di Gauss-Green. O indichìn cun $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ un cjamp di spostament infinitesimal imponût su $\bar{B} = B \cup \partial B$, che al indûs il tensôr di deformazion infinitesimal $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})$ cun componentis Cartesianis

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (2.1)$$

e il *secont gradient di spostament* $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v})$ cun componentis Cartesianis

$$\eta_{ijk} = v_{k,ij}, \quad (2.2)$$

$i, j, k = 1, 2, 3$. Par definizion, o vin

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \quad \eta_{ijk} = \eta_{jik} \quad (2.3)$$

e, duncje, $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\eta}$ a àn, rispetivementri, 6 e 18 componentis independentis. Si à di notâ che $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\eta}$ a àn dimensions diferentis. Di consequence, di là des costantis tradizionâls de teorie classiche de elasticitât lineâr, si spietisi che tes ecuazions constitutivis a sedin presintis costantis zontadis che a includin *fatôrs di scjale*. Chestis a son lis *costantis di scjale di lungjece interne*.

Dentri de teorie disvilupade in origjin di Mindlin pai materiâi solits iperelastics lineârs, si ipotize che la densitât di energjie di deformazion imagazenade in B e sedi une forme cuadratiche definide positive dai siei arguments

$$g = g(\epsilon_{ij}, \eta_{ijk}) = \frac{1}{2} (C_{ijpq} \epsilon_{pq} \epsilon_{ij} + 2H_{ijpqr} \eta_{pqr} \epsilon_{ij} + B_{ijkpqr} \eta_{pqr} \eta_{ijk}), \quad (2.4)$$

dulà che il tensôr di cuart ordin $\mathbb{C}$, il tensôr di cuint ordin $\mathbb{H}$ e il tensôr di sest ordin $\mathbb{B}$ a sodisfin lis cundizions di *simetrie maiôr*

$$C_{ijpq} = C_{pqij}, \quad H_{ijpqr} = H_{pqrij}, \quad B_{ijkpqr} = B_{pqrijk} \quad (2.5)$$

par ogni $i, j, k, p, q, r = 1, 2, 3$. Cun di plui, lis proprietâts di simetrie (2.3) su ϵ_{ij} e η_{ijk} , rispetivementri, a puartin a chestis altris *simetriis minôrs*:

$$\begin{aligned} C_{ijpq} &= C_{jipq} = C_{ijqp}, & H_{ijpqr} &= H_{jipqr} = H_{ijqpr}, \\ B_{ijkpqr} &= B_{jikpqr} = B_{jikqpr}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Il stât di solecitazion dal materiâl corispondent a un stât di deformazion gjeneric $(\epsilon_{ij}, \eta_{ijk})$ al è dât dal *tensôr di solecitazion intrinsiche* σ_{ij} e dal *tensôr di dople solecitazion intrinsiche* τ_{ijk} :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \epsilon_{ij}} (= \sigma_{ji}), \quad \tau_{ijk} = \frac{\partial g}{\partial \eta_{ijk}} (= \tau_{jik}). \quad (2.7)$$

De espression (2.4) de energjie di deformazion, lis ecuazions costitutivis a son

$$\sigma_{ij} = C_{ijpq} \epsilon_{pq} + H_{ijpqr} \eta_{pqr}, \quad \tau_{ijk} = H_{pqijk} \epsilon_{pq} + B_{ijkpqr} \eta_{pqr}. \quad (2.8)$$

Di chi indenant, o cjapìn in considerazion materiâi *isotropi*, o ben materiâi che par chei la energjie di deformazion g e à di jessi invariante sot di cualsisedi trasformazion ortogonâl Q_{ij} ($Q_{ij} Q_{kj} = \delta_{ik}$), includudis lis riflessions, o ben

$$g(\epsilon_{ij}, \eta_{ijk}) = g(Q_{mi} Q_{nj} \epsilon_{mn}, Q_{mi} Q_{nj} Q_{pk} \eta_{mnp}). \quad (2.9)$$

La cundizion (2.9) e impliche che i tensôrs di elasticitât $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{B}$ a sodisfin

$$\begin{aligned} C_{ijpq} &= C_{mnrs} Q_{mi} Q_{nj} Q_{rp} Q_{sq}, \\ H_{ijpqr} &= H_{mnstuv} Q_{mi} Q_{nj} Q_{sp} Q_{tq} Q_{vr}, \\ B_{ijkpqr} &= B_{lmnstuv} Q_{li} Q_{mj} Q_{nk} Q_{sp} Q_{tq} Q_{vr} \end{aligned} \quad (2.10)$$

par ogni matric Q_{ij} ortogonal. La invariance sot riflessions (par esempi, $\det(Q_{ij}) = -1$) e impliche che il tensôr di cuint ordin $\mathbb{H}$ al sparìs:

$$H_{ijpqr} = 0. \quad (2.11)$$

La espression gjenêral di un tensôr isotrop di cuart ordin, che al sodisfe lis simetriis maiôrs (2.5) e minôrs (2.6), e je

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.12)$$

dulà che λ e μ a son i moduli di Lamé. Si che duncje, la ecuazion constitutive (2.8) pal tensôr di solecitazion e je

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda (\epsilon_{kk}) \delta_{ij}. \quad (2.13)$$

Daûr de teorie di Weil (Weyl, 1946; Suiker e Chang, 2000), la espression gjenêral di un tensôr isotrop di sest ordin e je

$$\begin{aligned} B_{ijklmn} = & c_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + c_2 \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + c_3 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \\ & + c_4 \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + c_5 \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + c_6 \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} + \\ & + c_7 \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} + c_8 \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + c_9 \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + \\ & + c_{10} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + c_{11} \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} + c_{12} \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \\ & + c_{13} \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + c_{14} \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + c_{15} \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

dulà che $\{c_i\}_{i=1}^{15}$ a son costantis. Lis simetriis maiôr (2.5) e minôr (2.6) dal tensôr $\mathbb{B}$ a ridusin il numar di variabilis independentis:

$$\begin{aligned} \text{simetrie maiôr (2.5)} & \implies c_{13} = c_1, \quad c_6 = c_2, \quad c_{10} = c_4, \quad c_{14} = c_{12}; \\ \text{prime simetrie minôr (2.6)} & \implies c_7 = c_4, \quad c_{10} = c_5, \quad c_{11} = c_8, \\ & c_{13} = c_6, \quad c_{14} = c_9, \quad c_{15} = c_{12}; \\ \text{seconde simetrie minôr (2.6)} & \implies c_2 = c_1, \quad c_5 = c_4, \quad c_{10} = c_7, \\ & c_{11} = c_8, \quad c_{12} = c_9, \quad c_{15} = c_{14}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Al è pussibil dimostrâ che dome cinc coeficients a restin independents, stant che ducj chei altris a puedin jessi esprimûts in tiermins di, par esempi, $\{c_1, c_3, c_4, c_8, c_9\}$. Doprant la simetrie (2.3) di η_{ijk} e dopo cualchi semplificazione, la ecuazion constitutive (2.8) dal tensôr di dople

solecitazion e je

$$\begin{aligned}\tau_{ijk} = B_{ijklmn}\eta_{lmn} = & c_1(2\delta_{ij}\eta_{kmm} + \delta_{ik}\eta_{mmj} + \delta_{jk}\eta_{mmi}) + \\ & + c_3\delta_{ij}\eta_{mmk} + 2c_4(\delta_{ik}\eta_{jmm} + \delta_{jk}\eta_{imm}) + 2c_8\eta_{ijk} + 2c_9(\eta_{ikj} + \eta_{jki}).\end{aligned}\quad (2.16)$$

De espression parsore o podìn dedusi che, intal insiemi des 18 variabilis dal gradient di deformazion η_{ijk} , tal câs di materiâi isotrops il materiâl al reagjîs in maniere diferente dome a 5 misuris di deformazion costitutivementri independentis. A son i doi insiemis di variabilis contratis $\eta_{kmm} = (\nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}))_k$, $\eta_{mmk} = \Delta v_k$, de lôr modalitât di cubiament, e anche des variabilis $\eta_{ijk} = (\nabla^2 v_k)_{ij}$, e de lôr modalitât di cubiament. Achì, $\operatorname{div} \mathbf{v} = v_{i,i}$, ∇ al è l'operadôr gradient e Δ al è l'operadôr Laplacian. Cun (2.13) e (2.16), la densitât di energjie di deformazion e presente la forme no cubiade dade de sume dal tiermin classic g_c e dal tiermin di ordin superiôr $g_{h.o.}$, o sedi

$$\begin{aligned}2g(\epsilon_{ij}, \eta_{ijk}) &\equiv 2g_c(\epsilon_{ij}) + 2g_{h.o.}(\eta_{ijk}), \\ 2g_c(\epsilon_{ij}) &= 2\mu\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} + \lambda(\epsilon_{kk})^2, \\ 2g_{h.o.}(\eta_{ijk}) &= 4c_1\eta_{iik}\eta_{kmm} + c_3\eta_{iik}\eta_{mmk} + 4c_4\eta_{jkk}\eta_{jmm} + \\ &+ 2c_8\eta_{ijk}\eta_{ijk} + 4c_9\eta_{kij}\eta_{ijk},\end{aligned}\quad (2.17)$$

che e dimostre che il model di elasticitât isotropiche plui gjenerâl al è caraterizât di *siet* costantis dal materiâl, ven a stâi, i doi moduli di Lamé e cinc costantis di scjale.

Inte sezion successive o introdusarìn une teorie *simplificade* dal gradient di deformazion proponude di Yang et al. (2002), Lam et al. (2003) là che, in presince di ipotesis adeguadis, lis costantis zontadis di ordin superiôr a vegin ridusudis di cinc a trê. Cheste teorie e sarà doprade tes seziions 2.4 e 2.5 par disvilupâ un model di nanoplache di Kirchhoff-Love e un model di nanotrâf di Eulêr-Bernoulli.

2.3 Une teorie simplificade dal gradient di deformazion. O vin viodût te sezion di prime che il model isotropic gjenerâl dal materiâl cun gradient di deformazion inte elasticitât lineâr al à cinc coeficients di ordin superiôr. Chescj coeficients a àn di jessi determinâts in maniere sperimentâl e, si che duncje, al è di interès practic disvilupâ teoriis, anche semplificadis, cuntun numar minôr di costantis costitutivis.

In literature e je stade derivade une jerarchie di modei isotropics semplificâts di materiâi elastics cun gradient di deformazion, imponint ciertis simetriis zontadis o semplificant lis cundizions; par une analisi complete si viodi Polizzotto (2017). Il criteri comunementri plui adotât al consist intal introdusi une scomposizion iridusibile adeguade dal tensôr dal secont gradient η_{ijk} in components ortogonâi, che, in maniere tipiche, si fondin su la ripartizion in components cun olme/cence olme (vâl a dî in components idrostatiche/deviatoriche) e su la ripartizion simetriche/antisimetriche. In chest lavôr, o anîn daûr de analisi di Lam et al. (2003) là che la influence de part antisimetriche dal tensôr di curvadure e ven ignorade par ridusi lis costantis di scjale internis di cinc a trê.

O vin di premeti un pocjis di definizions relativis ai tensôrs di tierç ordin $\mathbb{T}$ cun componentis Cartesianis T_{ijk} , $i, j, k = 1, 2, 3$.

La *part simetriche* T_{ijk}^S di T_{ijk} e je avuâl ae sume dai components T_{ijk} par dutis lis permutazions pussibilis dai indiçs i, j, k dividude par $3!$:

$$T_{ijk}^S = \frac{1}{6} (T_{ijk} + T_{ikj} + T_{jik} + T_{kji} + T_{kij} + T_{jki}). \quad (2.18)$$

La *part antisimetriche* T_{ijk}^A di T_{ijk} e je

$$T_{ijk}^A = T_{ijk} - T_{ijk}^S. \quad (2.19)$$

Ben si intint che il tensôr T_{ijk}^S par sigûr al è invariant sot cualsisedi permutazion di indiç e che i doi tensôrs T_{ijk}^S , T_{ijk}^A a son unics.

Un tensôr di tierç ordin T_{ijk} al è dit *cence olme* o *deviatoric* se la sume des sôs componentis corrisponentis a une cubie di indiçs e je avuâl di zero, par ogni sielte de cubie di indiçs (come par solit, i indiçs ripetûts a vegin sumâts):

$$\begin{aligned} T_{ijj} &= 0 & \text{par ogni } i &= 1, 2, 3, \\ T_{iji} &= 0 & \text{par ogni } j &= 1, 2, 3, \\ T_{iik} &= 0 & \text{par ogni } k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Cualsisedi tensôr T_{ijk} al pues ancje jessi discomponût in mût univoc tant che

$$T_{ijk} = T_{ijk}^{(0)} + T_{ijk}^{(1)}, \quad (2.21)$$

dulà che $T_{ijk}^{(0)}$ e je la *la part cun olme* e $T_{ijk}^{(1)}$ e je la *part cence olme* di T_{ijk} .

Tal ultin, o riclamìn il prodot scalar tra doi tensôrs di tierç ordin:

$$\mathbb{S} \cdot \mathbb{T} = S_{ijk} T_{ijk}. \quad (2.22)$$

Se $S_{ijk} T_{ijk} = 0$, alore $\mathbb{S}$ e $\mathbb{T}$ a son definîts *ortogonâi*.

Lis definizions parsore si aplichin al secont tensôr gradient $\eta_{ijk} = v_{k,ij}$. La part simetriche (o *tensôr gradient di slungjament*, cun 10 componentis indipendentis) e la part antisimetriche (o *tensôr gradient di rotazion*, cun 8 componentis indipendentis) di η_{ijk} a son dadis di

$$\begin{aligned} \eta_{ijk}^S &= \frac{1}{3} (v_{k,ij} + v_{i,jk} + v_{j,ki}), \\ \eta_{ijk}^A &= \frac{1}{3} (2v_{k,ij} - v_{i,jk} - v_{j,ki}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

e a son ortogonâls:

$$\eta_{ijk}^S \eta_{ijk}^A = 0. \quad (2.24)$$

O discomponìn il tensôr gradient di slungjament η_{ijk}^S inte sô part cun olme (3 componentis indipendentis) e inte part cence olme (7 componentis indipendentis):

$$\eta_{ijk}^S = \eta_{ijk}^{(0)} + \eta_{ijk}^{(1)}, \quad (2.25)$$

$$\eta_{ijk}^{(0)} = \frac{1}{5} (\delta_{ij} \eta_{mmk}^S + \delta_{jk} \eta_{mmi}^S + \delta_{ki} \eta_{mmj}^S), \quad (2.26)$$

$$\eta_{mmk}^S = \frac{1}{3} (\eta_{mmk} + 2\eta_{kmm}). \quad (2.27)$$

Ancje la part cun olme e chê cence olme di η_{ijk}^S a son ortogonâls. Si che duncje, o vin discomponût il secont tensôr gradient η_{ijk} in trê componentis ortogonâls tra di lôr:

$$\eta_{ijk} = \eta_{ijk}^{(0)} + \eta_{ijk}^{(1)} + \eta_{ijk}^A, \quad \eta_{ijk}^{(0)} \eta_{ijk}^{(1)} = \eta_{ijk}^{(0)} \eta_{ijk}^A = \eta_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^A = 0. \quad (2.28)$$

Il tensôr gradient di rotazion η_{ijk}^A al pues jessi esprimût in tiermins di un tensôr di secont ordin cence olme χ_{ij} coincident cu la *curvadure*

$$\chi_{ij} = \omega_{i,j}, \quad \text{cun} \quad \omega_i = \frac{1}{2} \delta_{ijk} v_{k,j}, \quad (2.29)$$

dulà che $\boldsymbol{\omega} = \omega_i \mathbf{e}_i$ al è il vetôr assiâl de part antisimetriche dal gradient di spostament, vâl a dî $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T) \mathbf{a}$ par ogni $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Di fat, di (2.23) e (2.29) o vin

$$\eta_{ijk}^A = \frac{2}{3} (\delta_{ikl} \chi_{lj} + \delta_{jkl} \chi_{li}). \quad (2.30)$$

Cun di plui, doprant (2.29) in (2.27) o podìn esprimi i tiermins η_{mmi}^S , che a definissin $\eta_{ijk}^{(0)}$ come

$$\eta_{mmi}^S = \epsilon_{,i} + \frac{2}{3} \delta_{imn} \chi_{mn}^A, \quad (2.31)$$

dulà che $\epsilon = v_{m,m}$ e je la *deformazion di dilatazion*.

Su la base de rapresentazion (2.28), la scomposizion dal tensôr di dople tension τ_{ijk} in (2.7) e pues jessi scrite tant che

$$\tau_{ijk} = \tau_{ijk}^{(0)} + \tau_{ijk}^{(1)} + \tau_{ijk}^A, \quad (2.32)$$

dulà che lis componentis $\tau_{ijk}^{(0)}$, $\tau_{ijk}^{(1)}$, τ_{ijk}^A a son coniugadis intal sens dal lavôr disvilupât cu lis componentis dal secont gradient $\eta_{ijk}^{(0)}$, $\eta_{ijk}^{(1)}$, η_{ijk}^A , rispetivementri, e a son definidis in analogjie cun (2.25) e (2.26):

$$\tau_{ijk}^S = \tau_{ijk}^{(0)} + \tau_{ijk}^{(1)}, \quad (2.33)$$

$$\tau_{ijk}^{(0)} = \frac{1}{5} (\delta_{ij} \tau_{mmk}^S + \delta_{jk} \tau_{mmi}^S + \delta_{ki} \tau_{mmj}^S), \quad (2.34)$$

dulà che τ_{ijk}^S e je la part simetriche di τ_{ijk} e $\tau_{ijk}^A = \tau_{ijk} - \tau_{ijk}^S$ e je la part antisimetriche di τ_{ijk} . Lis trê componentis di τ_{ijk} in (2.32) a son ortogonâls tra di lôr e, cun di plui,

$$\begin{aligned} \tau_{ijk}^{(0)} &\text{ e je ortogonâl rispjet a } \eta_{ijk}^{(1)}, \eta_{ijk}^A, \\ \tau_{ijk}^{(1)} &\text{ e je ortogonâl rispjet a } \eta_{ijk}^{(0)}, \eta_{ijk}^A, \\ \tau_{ijk}^A &\text{ e je ortogonâl rispjet a } \eta_{ijk}^{(0)}, \eta_{ijk}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

E duncje, la densitât di energjie di deformazion di ordin superiôr $g_{h.o.}$ e pues jessi scrite tant che

$$2g_{h.o.} = \tau_{ijk}^{(0)} \eta_{ijk}^{(0)} + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + \tau_{ijk}^A \eta_{ijk}^A. \quad (2.36)$$

Cun (2.27) e (2.33) o vin

$$\tau_{ijk}^{(0)}\eta_{ijk}^{(0)} = \frac{3}{5}\tau_{mmk}^S\epsilon_{,k} + \frac{2}{5}\delta_{kmn}\tau_{mmk}^S\chi_{mn}. \quad (2.37)$$

Doprant (2.37) in (2.36), e doprant (2.30) par esprimi η_{ijk}^A in tiermins di χ_{mn} , o otignin

$$2g_{h.o.} = \pi_i\epsilon_{,i} + \tau_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}\chi_{ij}, \quad (2.38)$$

là che

$$\pi_i = \frac{3}{5}\tau_{mmi}^S, \quad m_{ij} = \frac{4}{3}\tau_{jpq}^A\delta_{ipq} + \frac{2}{5}\delta_{ijk}\tau_{mmk}^S. \quad (2.39)$$

Te ipotesi *a priori*

$$m_{ij}^A = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.40)$$

Lam et al. (2003) a àn *ipotizât* chestis relacions costitutivis di ordin superiôr

$$\pi_i = 2\mu l_0^2\epsilon_{,i}, \quad \tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2\eta_{ijk}^{(1)}, \quad m_{ij}^S = 2\mu l_2^2\chi_{ij}, \quad (2.41)$$

dulà che l_0 , l_1 , l_2 a son trê parametris positîfs di scjale dal materiâl e μ al è il modul di tai di Lamé. Pal contribût dal gradient di deformazion di prin ordin e je stade adotade la ecuazion classiche di Lamé (2.13). Lis grandecis cinematichis coinvolzudis in (2.41) a son

$$\epsilon = \epsilon_{kk}, \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \eta_{ijk}^{(1)} = & \frac{1}{3}(\epsilon_{jk,i} + \epsilon_{ki,j} + \epsilon_{ij,k}) - \frac{1}{15}(\delta_{ij}(\epsilon_{mm,k} + 2\epsilon_{mk,m}) + \\ & + \delta_{jk}(\epsilon_{mm,i} + 2\epsilon_{mi,m}) + \delta_{ki}(\epsilon_{mm,j} + 2\epsilon_{mj,m})), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\chi_{ij}^S = \frac{1}{4}(\delta_{ipq}w_{q,jp} + \delta_{jpp}w_{q,ip}). \quad (2.44)$$

Par completece, o ricuardìn che Munch et al. (2017) a àn dimostrât che ipotizâ la simetrie dal tensôr di solecitazion di cubie tant che in (2.40) nol va cuintri di nissune leç fisiche fundamentâl, o sedi che la solecitazion di cubie e pues jessi sielzude tant che simetriche par semplificâ lis ecuazions costitutivis. Di fat, al è pussibil dimostrâ che lis ecuazions costitutivis di Lam a corispuindin a une classe specifiche di materiâi cun gradient di deformazion isotropic, che si viodi Polizzotto (2017).

Te prossime sezion o disviluparìn un model di Kirchhoff-Love di nanoplache basât su la teorie semplificade di Lam.

2.4 Model di nanoplache di Kirchhoff-Love. Ta cheste seziun o formulin il probleme dal ecuilibri static par une nanoplache sutile in elasticitât lineâr cun gradient di deformazion doprant lis ecuazions costitutivis di ordin superiôr (2.41); che si viodi Morassi et al. (2023a).

Tachin de formulazion tridimensionâl. Assumint che lis azions esternis aplicadis ae configurazion di riferiment naturâl di un solit continui B si ridusin a un cjamp di fuarcis regolârs $f_i \mathbf{e}_i$, $f_i : B \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, la energjie totâl imagazenade in B par une deformazion infinitesimâl cun cjamp di spostament regolâr $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ e je dade di

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \int_B g(\epsilon_{ij}(\mathbf{v}), \eta_{ijk}(\mathbf{v})) dv - \int_B f_i v_i dv, \quad (2.45)$$

dulà che $g = g(\epsilon_{ij}, \eta_{ijk})$ e je come in (2.17), cun $g_{h.o.}(\eta_{ijk})$ tant che in (2.38). Par dedusi la formulazion debile dal probleme di ecuilibri static, o imponin la stazionarietât di $\mathcal{E}$ intun cjamp di soluzions di spostament $\mathbf{u} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se no vegin imponudis cundizions gjeometriche su ∂B , la formulazion debile e assum cheste forme: determinâ $\mathbf{u}$ cussì che

$$\begin{aligned} & \int_B (\sigma_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\mathbf{w}) + \pi_i(\mathbf{u}) \epsilon_{,i}(\mathbf{w}) + \tau_{ijk}^{(1)}(\mathbf{u}) \eta_{ijk}^{(1)}(\mathbf{w}) + m_{ij}^S(\mathbf{u}) \chi_{ij}^S(\mathbf{w})) dv = \\ & = \int_B f_i w_i dv, \end{aligned} \quad (2.46)$$

par ogni funziun di prove regolâr $\mathbf{w}$.

Intal tratâ nanoplache sutile, si interessarin di dominis tridimensionâi dal gjenar $B = \Omega \times (-t/2, t/2)$, dulà che Ω al è un sotinsiemi viert, limitât e conetût dal plan $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ che al rapresente il plan centrâl de plache, e t e je la altece uniforme, cun $t \ll \text{diam}(\Omega)$. O cjaparin in considerazion dominis Ω cun ôr regolâr, par esempi $\partial\Omega$ di classe $C^{2,1}$.

Dâur de teorie di Kirchhoff-Love, l'insiemi dai spostamenti amissibii dal pont di viste cinematic al è dât in tiermins di spostament trasversâl $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tant che

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{v} : \Omega \times (-t/2, t/2) \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = -x_3 w_{,\alpha} \mathbf{e}_\alpha + w \mathbf{e}_3\}. \quad (2.47)$$

Lis misuris di deformazion $\epsilon_{,i}(\mathbf{v})$, $\eta_{ijk}^{(1)}(\mathbf{v})$, $\chi_{ij}^S(\mathbf{v})$ asociadis a un dât $\mathbf{v} \in \mathcal{D}$ a puedin jessi valutadis come in (2.42)–(2.44):

$$\epsilon_{,1} = -x_3 \Delta w_{,1}, \quad \epsilon_{,2} = -x_3 \Delta w_{,2}, \quad \epsilon_{,3} = -\Delta w, \quad (2.48)$$

$$\chi_{11}^S = w_{,12}, \quad \chi_{12}^S = \frac{1}{2}(w_{,22} - w_{,11}), \quad \chi_{22}^S = -w_{,12}, \quad (2.49)$$

$$\eta_{111}^{(1)} = \frac{x_3}{5}(3w_{,122} - 2w_{,111}), \quad \eta_{222}^{(1)} = \frac{x_3}{5}(3w_{,112} - 2w_{,222}), \quad \text{etc.} \quad (2.50)$$

La liste complete di η_{ijk} e pues jessi cjatade in (Morassi et al., 2023a). Sostituint lis espression di $\epsilon_{,i}(w)$, $\eta_{ijk}^{(1)}(w)$, $\chi_{ij}^S(w)$ te formulazion debile (2.46), dopo une integrazione su la altece e un riordin dai tiermins, la formulazion debile bidimensionâl dal probleme di ecuilibri par une nanoplache sutile e consist tal cjatâ il spostament trasversâl $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in mût che $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2)$

$$\int_{\Omega} (-w_{,\alpha\beta} M_{\alpha\beta}(u) + w_{,\alpha\beta\gamma} \overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h(u)) dx = \int_{\Omega} (-w_{,\alpha} c_{\alpha} + wp) dx, \quad (2.51)$$

par ogni funzion regolâr $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

dulà che, cu la notazion $\int_t g dx_3 \equiv \int_{-t/2}^{t/2} g dx_3$,

$$c_{\alpha} = \int_t f_{\alpha} x_3 dx_3, \quad p = \int_t f_3 dx_3. \quad (2.52)$$

Si à di tignî cont che, par semplificâ la notazion, o vin impuestât $x = (x_1, x_2)$ e $dx = dx_1 dx_2$. I *moments di prin ordin* $M_{\alpha\beta}(u)$ a son dâts di $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2)$

$$M_{\alpha\beta}(u) = -(P_{\alpha\beta\gamma\delta} + P_{\alpha\beta\gamma\delta}^h) u_{,\gamma\delta}, \quad (2.53)$$

cun

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = B((1 - \nu)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}), \quad (2.54)$$

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta}^h = (2a_2 + 5a_1)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + (-a_1 - a_2 + a_0)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}, \quad (2.55)$$

dulà che la rigjiditât ae flession $B = B(x)$ de nanoplache e je definide in tiermins di modul di Young E e il coeficient di Poisson dal materiâl ν tal mût che al seguìs

$$B(x) = \frac{t^3 E(x)}{12(1 - \nu^2(x))} \quad (2.56)$$

e

$$a_0(x) = 2\mu(x)tl_0^2, \quad a_1(x) = \frac{2\mu(x)tl_1^2}{15}, \quad a_2(x) = \mu(x)tl_2^2, \quad (2.57)$$

$$l_i = \text{costante} > 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.58)$$

Il modul di Young e il coeficient di Poisson a puedin jessi esprimûts tai tiermins dai moduli di Lamé μ e λ :

$$E(x) = \frac{\mu(x)(2\mu(x) + 3\lambda(x))}{\mu(x) + \lambda(x)}, \quad \nu(x) = \frac{\lambda(x)}{2(\mu(x) + \lambda(x))}. \quad (2.59)$$

I moments di ordin superiôr $\overline{M}_{ijk}^h(u)$ ($i, j, k = 1, 2$) a son dâts di

$$\overline{M}_{ijk}^h(u) = Q_{ijklmn} u_{lmn}, \quad (2.60)$$

cun ($i, j, k, l, m, n = 1, 2$)

$$\begin{aligned} Q_{ijklmn} = & \frac{1}{3}(b_0 - 3b_1)\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \frac{1}{6}(b_0 - 3b_1)\delta_{ik}(\delta_{jl}\delta_{mn} + \delta_{jm}\delta_{ln}) + \\ & + \frac{1}{6}(b_0 - 3b_1)\delta_{jk}(\delta_{il}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{ln}) + Q_8\delta_{kn}(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}) + \\ & + Q_9(\delta_{jn}(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}) + \delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl})), \end{aligned} \quad (2.61)$$

dulà che

$$2(Q_8 + 2Q_9) = 5b_1, \quad (2.62)$$

$$b_0(x) = 2\mu(x)\frac{t^3}{12}l_0^2, \quad b_1(x) = \frac{2}{5}\mu(x)\frac{t^3}{12}l_1^2 \quad \text{in } \Omega. \quad (2.63)$$

Par ce che al tocje lis cundizions di eliticitât su lis costantis constitutivis, sui moduli di Lamé o domandìn

$$\mu(x) \geq \alpha_0 > 0, \quad 2\mu(x) + 3\lambda(x) \geq \gamma_0 > 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2.64)$$

dulà che α_0, γ_0 a son costantis positivis. Se o indichìn

$$l = \min\{l_0, l_1, l_2\} > 0, \quad (2.65)$$

cun (2.57) e (2.63)–(2.65) o vin

$$a_i(x) \geq tl^2\alpha_0^h > 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad b_j(x) \geq t^3l^2\beta_0^h > 0, \quad j = 0, 1, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.66)$$

dulà che $\alpha_0^h = \frac{2}{15}\alpha_0$ e $\beta_0^h = \frac{1}{30}\alpha_0$.

O clamìn $\mathbb{M}^2, \mathbb{M}^3$ i spazis di Banach dai tensôrs rispetivementri di secont e tierç ordin e $\widehat{\mathbb{M}}^2, \widehat{\mathbb{M}}^3$ i sotspazis corispondents dai tensôrs che

a àn componentis invariantis rispìet a dutis lis permutazions dai indiçs (ven a stâi tensôrs dal dut simetrics). Al sedi, duncje, $\mathcal{L}(X, Y)$ il spazi dai operadôrs lineârs limitâts tra i spazis di Banach X e Y .

Al è facil verificâ che

$$\mathbb{P} \in \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^2, \widehat{\mathbb{M}}^2), \quad \mathbb{P}^h \in \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^2, \widehat{\mathbb{M}}^2), \quad \mathbb{Q} \in \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^3, \widehat{\mathbb{M}}^3). \quad (2.67)$$

Cun di plui, par ogni $A, B \in \widehat{\mathbb{M}}^2$ e par ogni $C, D \in \widehat{\mathbb{M}}^3$ o vin

$$\mathbb{P}A \cdot B = \mathbb{P}B \cdot A, \quad \mathbb{P}^h A \cdot B = \mathbb{P}^h B \cdot A, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.68)$$

$$\mathbb{Q}C \cdot D = \mathbb{Q}D \cdot C, \quad \text{in } \Omega. \quad (2.69)$$

La convessitât fuarte de densitât di energjie di deformazion e je garantide di chest risultât. Al sedi $(D^2w)_{ij} = w_{,ij}$, $(D^3w)_{ijk} = w_{,ijk}$, $i, j, k = 1, 2$.

Leme 2.1. *Ipotizìn che i tensôrs elastics $\mathbb{P}, \mathbb{P}^h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^2, \widehat{\mathbb{M}}^2))$ e $\mathbb{Q} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^3, \widehat{\mathbb{M}}^3))$ a sedin dâts di (2.54)–(2.55) e (2.61)–(2.63) rispìetivementrì, cun modui di Lamè λ, μ che a sodisfin (2.64).*

Par ogni $w \in H^3(\Omega)$, o vin

$$(\mathbb{P} + \mathbb{P}^h)D^2w \cdot D^2w \geq t(t^2 + l^2)\xi_{\mathbb{P}}|D^2w|^2 \quad \text{c.d. in } \Omega, \quad (2.70)$$

$$\mathbb{Q}D^3w \cdot D^3w \geq t^3l^2\xi_{\mathbb{Q}}|D^3w|^2 \quad \text{c.d. in } \Omega, \quad (2.71)$$

dulà che $\xi_{\mathbb{P}} > 0$, $\xi_{\mathbb{Q}} > 0$ a son costantis che a dependin dome di α_0 e γ_0 , e l al è stât definît in (2.65).

Par otignî la formulazion fuarte dal probleme di ecuilibri (2.51), o elaborìn l'integrâl a man çampe di (2.51) integrant par parts e trasferint lis derivadis de funzion di prove w aes funzions $M_{\alpha\beta}(u)$, $\overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h(u)$ de soluzion u . Par fissâ lis ideis, o calcolìn lis cundizions di Dirichlet. Il probleme di Neumann al sarà analizât inte sezion 4.3. Tignint cont de regolaritât dal contor (o ben, $\partial\Omega$ di classe $C^{2,1}$), da la arbitrarietât di w o otignìn $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2)$

$$\begin{cases} (M_{\alpha\beta} + \overline{M}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}^h)_{,\alpha\beta} + c_{\alpha,\alpha} + p = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = u_{,n} = u_{,nn} = 0, & \text{in } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.72)$$

dulà che $M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}(u)$ e $\overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h = \overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h(u)$ a son dâts, in maniere rispìetive, di (2.53)–(2.55) e (2.60)–(2.63). Achì, $u_{,n}$, $u_{,nn}$ a indichin la

prime e la seconde derivade direzionâl di u dilunc de normâl esterne unitarie $\mathbf{n}$ a Ω .

Par materiâi isotrops omogjenis, la ecuazion diferenziâl e devente (Wang et al., 2011)

$$-d_1 \Delta \Delta u + d_2 \Delta \Delta \Delta u + c_{\alpha, \alpha} + p = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (2.73)$$

cun

$$d_1 = b_0 + 2b_1 = 2\mu \frac{t^3}{12} \left(l_0^2 + \frac{2}{5} l_1^2 \right), \quad (2.74)$$

$$d_2 = B + a_0 + 4a_1 + a_2 = B + \mu t \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right). \quad (2.75)$$

2.5 Model di nanotrâf di Eulêr-Bernoulli. Te part che e seguîs, o adatìn i arguments de sezion precedente par formulâ il probleme dal ecuilibri static par une nanotrâf. Par semplicitât, o tratarin in maniere separate la deformazion estensionâl e chê flessionâl.

Tachin dal probleme estensionâl (Akgoz e Civalek, 2014).

Tal tratâ lis nanotrâfs, o lavorin intun domini cilindric $B = \Omega \times (0, L)$, dulà che Ω al è un sotinsiemi viert, limitât e conetût dal plan $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ che al rapresente la sezion trasversâl de nanotrâf, e L e je la sô lungjece, cun $L \gg \text{diam}(\Omega)$. O indichin cun $\{O, X_1, X_2, X_3\}$ un sisteme di riferiment Cartesian in $\mathbb{R}^3$ cun base canoniche $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$, origjin $O = (0, 0, 0)$ coincident cul baricentri di $\Omega \times \{x_1 = 0\}$ e X_2, X_3 as principâi di inerzie de sezion trasversâl Ω , o sedi $\int_{\Omega} x_1 x_2 d\Omega = 0$. La aree de sezion trasversâl e sarà indicade cun A .

Daûr de teorie di Eulêr-Bernoulli, l'insiemi dai spostaments amisibii in estension dal pont di viste cinematic al è dât tai tiermins dal spostament assiâl $w : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$ tant che

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{v} : \Omega \times (0, L) \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = w(x_1)\mathbf{e}_1\}. \quad (2.76)$$

Di (2.42)–(2.44), lis misuris di deformazion $\epsilon_{,i}(\mathbf{v})$, $\eta_{ijk}^{(1)}(\mathbf{v})$, $\chi_{ij}^S(\mathbf{v})$, $i, j, k = 1, 2, 3$, associadis al insiemi $\mathcal{D}$ indicât parsore a son

$$\epsilon_{,1} = w'', \quad \epsilon_{,2} = \epsilon_{,3} = 0, \quad (2.77)$$

$$\chi_{ij}^S = 0, \quad (2.78)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \begin{cases} \frac{2}{5}w'' & \text{se } (i, j, k) = (1, 1, 1), \\ -\frac{1}{5}w'' & \text{se } (i, j, k) \text{ a son permutazions di } (1, 2, 2), (1, 3, 3), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.79)$$

Inserint chestis espressions te formulazion debile (2.46), dopo di une integrazion su la seziun trasversâl Ω e di un riordin dai tiermins, la formulazion debile unidimensionâl dal probleme di eculibri par une nanotrâf sutile in estension e consist tal cjatâ une funzion regolâr $\mathbf{u} = v(x)\mathbf{e}_1 \in \mathcal{D}$ cussì che

$$\int_0^L (w'N(v) + w''N^h(v))dx = \int_0^L qw dx, \quad (2.80)$$

par ogni funzion regolâr $w : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$,

dulà che $q = \int_{\Omega} f_1 d\Omega$. Si à di notâ che, par semplificâ la notazion, o vin impuestât $x = x_1$.

La *fuarce assiâl di prin ordin* $N(v)$ e la *fuarce assiâl di secont ordin* $N^h(v)$ a son dadis di

$$\begin{aligned} N(v) &= E^*Av', \quad E^* = 2\mu + \lambda, \quad (\text{modul di Young } \textit{nominâl}) \\ N^h(v) &= \left(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2\right)\mu Av''. \end{aligned} \quad (2.81)$$

La formulazion fuarte dal probleme di eculibri e pues jessi otignude integrant par parts in (2.80) e doprant la arbitrarietât de funzion di prove w . La scrivìn tai tiermins des fuarcis assiâls $N(v)$ e $N^h(v)$ e pes cundizions al contor di Dirichlet: si trate di cjatâ une soluzion regolâr $v : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$ a

$$\begin{cases} N'(v) - (N^h(v))'' + q = 0, & \text{in } (0, L), \\ v(0) = v'(0) = 0, \\ v(L) = v'(L) = 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

Par materiâi isotrops omogjenis, la ecuazion diferenziâl e devente

$$E^*Av'' - \left(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2\right)\mu Av'''' + q = 0, \quad \text{in } (0, L). \quad (2.83)$$

O concludìn la seziun cu la analisi dal probleme di flession intal plan $\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1$ (Kong et al., 2009). L'insiemi dai spostaments amissibii dal

pont di viste cinematic tal ambit de teorie di Eulêr-Bernoulli al è dât in tiermins dal spostament trasversâl (regolâr) $w : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$ tant che

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{v} : \Omega \times (0, L) \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = -x_3 w'(x_1) \mathbf{e}_1 + w(x_1) \mathbf{e}_3\}. \quad (2.84)$$

Lis misuris di $\epsilon_{,i}(\mathbf{v})$, $\eta_{ijk}^{(1)}(\mathbf{v})$, $\chi_{ij}^S(\mathbf{v})$, $i, j, k = 1, 2, 3$, associadis al insiemi $\mathcal{D}$ a son

$$\epsilon_{,1} = -x_3 w''', \quad \epsilon_{,2} = 0, \quad \epsilon_{,3} = -w'', \quad (2.85)$$

$$\chi_{12}^S = \chi_{21}^S = -\frac{1}{2} w'', \quad \chi_{ij}^S = 0 \text{ pes vòs restantis}, \quad (2.86)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{2}{5} x_3 w''' & \text{se } (i, j, k) = (1, 1, 1), \\ \frac{1}{5} w'' & \text{se } (i, j, k) = (3, 3, 3), \\ -\frac{4}{5} w'' & \text{se } (i, j, k) \text{ a son permutazions di } (1, 1, 3), \\ \frac{1}{5} x_3 w''' & \text{se } (i, j, k) \text{ a son permutazions di } (1, 2, 2), (1, 3, 3), \\ \frac{1}{15} w'' & \text{se } (i, j, k) \text{ a son permutazions di } (2, 2, 3), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (2.87)$$

Lis espressions ripuartadis parsore a son inseridis te formulazion debile (2.46) e, daspò di une integrazion su la seziun trasversâl Ω , la formulazion debile unidimensionâl par une nanotrâf sutile in flession e consist tal cjatâ un $\mathbf{u} = -x_3 u'(x) \mathbf{e}_1 + u(x) \mathbf{e}_3 \in \mathcal{D}$ regolâr, cussì che $(x = x_1)$

$$\int_0^L (-w'' M(u) - w''' M^h(u)) dx = \int_0^L (-w' c + w p) dx \quad (2.88)$$

par ogni funzion regolâr $w : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$,

dulà che $c = \int_{\Omega} x_3 f_1 d\Omega$, $p = \int_{\Omega} f_3 d\Omega$.

Lis ecuazions costitutivis dal *moment di flession di prin ordin* $M(u)$ e *moment di flession di secont ordin* $M^h(u)$ a son dadis di

$$\begin{aligned} M(u) &= -S u'', \quad S = E^* I_2 + 2\mu A l_0^2 + \frac{8}{15} \mu A l_1^2 + \mu A l_2^2, \\ M^h(u) &= -K u''', \quad K = 2\mu I_2 l_0^2 + \frac{4}{5} \mu I_2 l_1^2, \quad I_2 = \int_{\Omega} x_3^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (2.89)$$

La formulazion fuarte dal probleme di ecuilibri e pues jessi derivade cu la integrazion par parts in (2.88) e doprant la arbitrarietât de funzion di prove w . Pes cundizions al contor di Dirichlet, o vin

$$\begin{cases} M''(u) - (M^h(u))''' + c' + p = 0, & \text{in } (0, L), \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = 0, \\ u(L) = u'(L) = u''(L) = 0. \end{cases} \quad (2.90)$$

3. Identificazion di masse basade su risonadôrs in nanotrâfs

3.1 Introduzion. In di di vuê, la comunitât sientifiche e je atrate dal ûs des nanostruturis (nanotubui di carboni, sfueis di grafene, nanofii) tant che nanosensôrs. Il motîf al è leât aes carateristichis prometentis des nanostruturis rispjet a une lungje schirie di aplicazions te sience e te tecnologjie. I nanosensôrs a puedin jessi classificâts in sîs grups principâi: mechanics, eletrics, otics, magnetics, chimics e termics. In cheste part nus interessin i sensôrs mechanics e i metodis basâts su lis vibrazions pe identificazion di masse par mieç des nanotrâfs (Eom et al., 2011; Wang e Arash, 2014; Arash et al., 2015).

Il principi fisic si base sul fat che la adesion dal analite su la superficie e modifiche la masse dal sisteme di riferiment. Duncje, monitorant lis variazions des frecuencis di risonance al è pussibil determinâ la distribuzion de masse zontade no cognossude. La ipotesis di base e je che la perturbazion causade dal tacâsi di atoms/moleculis estraniis o dal as-sorbiment chimic/molecolâr al puedi jessi descritte dome de perturbazion de densitât di masse dal nanorisonadôr. A esistin modei mechanics plui sofisticâts là che te analisi e ven considerade ancje la modificazion simultanie des proprietâts di rigiditât imbinade al aument di masse (Tamayo et al., 2006). Achì, o trascurarìn chescj contribûts e o considerarìn dome lis variazions di masse.

La sensibilitât al rilevament di masse e je aumentade in mût significatîf tai ultins agns. La capacitât di rilevament e je stade ampliade dal picogram (10^{-12} g) che si jere rivâts a rilevâ tal 2001 al yoctogram (10^{-24} g, dal stes ordin di grandece de masse dal proton) che si è rivâts a rilevâ tal 2012; su chest, che si viodi Li et al. (2015), Tamayo (2015), Munawar et al. (2019).

Il probleme di identificazion par une singule masse concentrade, modelade come masse puntiforme, tacade su la superficie dal nanorisonadôr al è stât frontât in diviers contribûts, tra altris, par esempli in (Tamayo et al., 2006). In Morassi et al. (2017) al è stât disvilupât un metodi perturbatîf basât su la misurazione de variazion des primis dôs frecuencis di risonance di une nanotrâf che e vibre in direzion assiâl in cundizions al contor a sbalç. Une estension aes vibrazions di flession e je stade proponude di Dilena et al. (2019). Bouchaala et al. (2016) al à, invezit, presentât un metodi par identificâ une masse concentrade tacade a une

nanotrâf fissade a lis dôs estremitâts par mieç di une azion eletrostatiche.

I lavôrs citâts parsore a cjapin in considerazion massis concentradis tacadis al sensôr. Dut câs, la masse distribuide zontade che e rapresente l'analite assorbît e somee che e sedi plui realistiche te pratiche. A chest fin, o riclamin i lavôrs di Hanay et al. (2015) e Bouchaala (2018). In Hanay et al. (2015) e je stade proponude une metodologjie inerziâl di diagnostiche che e permet la identificazion simultanie dal supuart e de intensitât des massis distribuidis midiant di misurazions in timp reâl dai cambiaments des primis frecuencis di risonance di une nanotrâf fissade a une sole estremitât sot vibrazion trasversâl. Altris contribûts si puedin cjetâ in (Sader et al., 2018; Kelleci et al., 2018).

Intune schirie di articui resints, o vin disvilupât un metodi di ricostruzione par identificâ lis variaziions di masse distribuidis a partî di un numar finît di frecuencis di risonance di un risonadôr a nanotrâf, sedi sot vibrazion assiâl (Dilena et al., 2019b,a) sedi sot vibrazion flessionâl (Dilena et al., 2020). Achì il metodi al sarâ descrit par une nanotrâf in vibrazion assiâl cu lis dôs estremitâts fissadis, assumint che il coeficient di masse al sedi *a priori cognossût par metât* de nanotrâf e che la masse zontade e sedi une *picule perturbazion* de masse iniziâl totâl.

Dal pont di viste matematic, chest probleme al jentre te classe dai *problemis inviers finîts miscs* par operadôrs diferenziâi di cuart ordin dal gjenar di Eulêr-Bernoulli, stant che un numar finît di autovalôrs che a fasin part di un unic spetri al è cognossût e une cognossince parziâl dal coeficient discognossût e je disponibile. Un risultât celebri di unicitât par cheste classe di problemis inviers si pues cjetâlu za in Hochstadt and Lieberman (1978). Chest risultât classic al vâl pai operadôrs diferenziâi di secont ordin di Sturm-Liouville che a guviernin la vibrazion assiâl des astis elasticis classicis, o sedi, $Lv = -\frac{1}{\rho(x)}v''(x)$, par une aste cun rigjiditât assiâl unitarie e densitât di masse lineâr $\rho(x)$. Culì, $v(x)$ al esprim il spostament longjitudinâl in x de sezion trasversâl de aste, $x \in [0, L]$, dulà che L e je la lungjece de aste. Hochstadt e Lieberman a àn dimostrât che se $\rho(x)$ al è prescrit su $[\frac{L}{2}, L]$, alore ducj i infinîts autovalôrs cun cundiziions al contor di estremitâts fissadis $v(0) = 0 = v(L)$ a bastin par determinâ in mût univoc $\rho(x)$ on $[0, \frac{L}{2}]$.

Intal câs di operadôrs di cuart ordin, come chel che al guvierne la vibrazion assiâl di une nanotrâf, par esempi, $Lv = \frac{1}{\rho}(bv^{IV} - av'')$, cun a, b coeficients di rigjiditât costants positîfs e $\rho(x)$ funzion di den-

sitât di masse lineâr no cognossude (che si viodi la ecuazion (3.21)₁ chi sot), i risultâts univocs par $\rho(x)$ a son pôcs e a domandin la cognossince di un insiemî infinît ancjemò plui grant di autovalôrs. Par esempi, un risultât classic di Barcilon (1974) al mostre che la determinazion univoche dai coefficients $p(x)$, $q(x)$ dal operadôr di Eulêr-Bernoulli $Lv = v^{IV} - (p(x)v')' + q(x)v$ al domande la cognossince di trê spetris complets associâts a trê diviersis cundizions al contor; che si viodi Gladwell (2004) par une analisi complete dal probleme. Si rimande anje a Schueller (2001) pai risultâts di unicitât locâl relatîfs a un operadôr di Eulêr-Bernoulli par un probleme inviers ai autovalôrs di tip misc cun doi coefficients pâr, e a Caudill et al. (1998) pal prin studi sistematic dai insiemis di coefficients isospetrâi pai operadôrs di Eulêr-Bernoulli.

Tal studi dal probleme inviers ai autovalôrs di cuart ordin cun *dâts finîts* a nassin altris dificoltât, che a àn la lôr origjin prin di dut de no unicitât de soluzion e de dificoltât di otignî stimis di erôr su la aprossimazion uniforme dal coefficient discognossût. Al è pussibil dimostrâ che chestis stimis a domandin la cognossince di infinîts autovalôrs o, almancul, di une formule asintotiche precise e dâts spetrâi suficients par otignî une buine aprossimazion dai dâts infinîts (Hald, 1978a). Intai câs reâi, nissun di chescj elements al è disponibil. In ogni câs, cundut de lôr impuartance e difusion intes aplicazions praticis, i studis gjenerai incentrâts sui problemis inviers ai autovalôrs cun dâts finîts a son avonde pôcs. In cheste direzion, il contribût di Barnes (1991) al è illuminant. Barnes al dimostre che par cheste classe di problemis inviers al è fondamentâl determinâ la topologjie plui debile là che l'insiemî disponibil di autovalôrs al è continui (rispet al coefficient discognossût), stant che se di no si cirarès di estrai dai dâts spetrâi plui informazions di chês che chei a contegnin. Barnes (1991) al furnìs cualchi aprossimazion rafinade de topologjie plui debile. Inte sezion sucessive 3.2, o riassumìn lis ideis principâls e i risultâts de impostazion di Barnes.

Ae lûs des cuistions ripuartadis chi parsore e ampliant une idee disvilupade in (Morassi, 2007) pe identificazion dai dams strutturâi intes astis classicis in scjale reâl, il nestri mût di frontâ il probleme inviers ai autovalôrs cun dâts finîts si môf di un pont di viste diferent. Assumint che la variazion di masse e sedi une perturbazion *piçule* de distribuzion di masse di riferiment de nanotrâf in vibrazion assiâl, il probleme inviers al ven linearizât ator de configurazion di riferiment. Daspò, lis vari-

azioms di frecuece causadis de variaziom di masse a son coreladis cui coeficients di Fourier gjeneralizâts de variaziom di masse discognossude, valutâts su la fonde di une specifiche famee di funzioms; che si viodi, par chest, la seziom 3.3. E ven proponude une procedure numeriche basade suntun algoritmi iteratîf di prin ordin e al ven furnît un risultât di convergjenca locâl de ricostruzion; si viodi la seziom 3.4. Par completece, si à di riclamâ che la idee di colegâ i coeficients di Fourier dal coeficient discognossût cu lis variazioms di frecuece e je vecje e e va indaûr al contribût fondamentâl dât ae teorie dai problemis inviers ai autovalôrs Borg (1946); par aplicazioms numerichis, che si viodin ancje Hald (1978b) e Knobel e Lowe (1993). A son disponibilis estensions de metodiche ae variaziom di masse gjenerâl e ai dâts su lis vibrazions di flession che a saran discutudis inte seziom 3.5.

3.2 Problemis inviers ai autovalôrs cun dâts finîts. Inte plui part dai problemis inviers ai autovalôrs che si cjatin intes aplicazioms inzegneristichis al è pussibil misurâ dome un numar finît di prins autovalôrs. Chest al rint il probleme plui difcil in maniere significative rispjet al câs dulà che si à a disposizion une cuantitât infinide di dâts. In cheste seziom a vegnin ilustrâts in curt cierts aspiets gjenerâi relatîfs ae formulazion matematiche dai problemis inviers ai autovalôrs cun dâts finîts. I nestris riferiments principâi a son i doi articui (Barnes, 1991) e (Barnes e Knobel, 1995).

3.2.1 Problemis inviers ai autovalôrs infinîts e finîts

O disvilupìn la nestre analisi in riferiment al probleme di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = q(x)y, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0 = y(1), \end{cases} \quad (3.1)$$

dulà che $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e je une funzion. Sot minimis ipotesis a priori su $q(x)$ (par esempi, $|q(x)|$ limitât in $[0, 1]$), il probleme ai autovalôrs (3.1) al amet une famee numerabile di autocubiis $\{\lambda_n(q), y_n(x; q)\}_{n=1}^{\infty}$, cun autovalôrs $\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < \dots$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(q) = +\infty$, e i corrispondents autovetôrs $y_n(x; q)$.

Denotìn cun $q^*(x)$ il potenziâl no cognossût che o vin di determinâ, o, almancul, di arossimâ, doprant lis informazioms dadis sui autovalôrs dal probleme.

Come che o vin za anticipât inte seziun introdutiva 3.1, o podìn distingui dôs classis principâls di problemis inviers. La prime, che o vin clamât *probleme inviers infinît*, e consist tal determinâ $q^*(x)$ dal spetri complet infinît $\{\lambda_n(q^*)\}_{n=1}^\infty$. La leterature in materie e je imense, che si viodin, par esempi, i libris di Levitan (1987), Pöschel e Trubowitz (1987), Gladwell (2004) e la rassegne classiche di McLaughlin (1986). Pe nestre analisi al è util riclamar il risultât classic di Hald (1978a), che al à dimostrât che se doi potenziâi $q(x)$ e $q^*(x)$ a son dongje avonde e a son ducj i doi simetrics in $[0, 1]$ ($q(x) = q(1 - x)$ e $q^*(x) = q^*(1 - x)$ in $[0, 1]$), alore

$$\|q - q^*\|_{L^\infty([0,1])} \leq 2 \cdot 10^{8+38M+11M^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(q) - \lambda_n(q^*)|, \quad (3.2)$$

dulà che $M > 0$ e je une costante. Chi, $L^\infty([0, 1])$ al è il spazi des funziions misurabilis di Lebesgue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cussì che $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in [0,1]} |f(x)| < \infty$ cuasi dapardut in $[0, 1]$. La norme L^∞ e riclame il metodi adotât in tancj problemis di inzegnarie par confrontâ visivementri dôs funziions. La stime (3.2) e mostre che par otignî une aprossimazion uniforme dal potenziâl (pâr) no cognossût $q^*(x)$ nus coventin une cuantitât infinide di dâts spetrâi. Ancje in cheste cundizion une vore favorevule, la stime di stabilitât (3.2) no je masse utile inte pratiche, stant che la costante e assum valôrs cetant grancj ancje cuant che M al è pigul, par esempi, dal ordin di 1.

Ancje cuant che il potenziâl nol è simetric, ma avonde dongje a un potenziâl cognossût, al è in dut câs pussibil fâ une stime di stabilitât L^2 di $q - q^*$ come che e à dimostrât McLaughlin (1988):

$$\|q - q^*\|_{L^2([0,1])}^2 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} ((\lambda_n(q) - \lambda_n(q^*))^2 + n^6(r_n(q) - r_n(q^*))^2), \quad (3.3)$$

dulà che $r_n(q) = \|y_n(x; q)\|_{L^2([0,1])}^2 / y_n'(0; q)$ a son costantis di normazion e C e je una costante positive. O ricuardin che, par ogni p , $1 \leq p < +\infty$, $L^p([0, 1])$ al è il spazi des funziions misurabilis di Lebesgue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cussì che la norme L^p e je limitade, par esempi $\|f\|_{L^p([0,1])} = \left(\int_0^1 |f|^p(x) dx \right)^{1/p} < +\infty$. Ancjemò una volte, la stime (3.3) e mostre che una cuantitât infinide di dâts spetrâi e conten informaziions suficientis par determinâ una aprossimazion L^2 dal potenziâl q^* .

I risultâts che o vin viodût parsore a domandin la cognossince di infinîts autovalôrs o, almancul, di une formule asintotiche par stimâ autovalôrs di ordin plui grant. I modei matematics dai sistemis in vibrazion reâi a pierdin in curt acuratece te stime dai autovalôrs di ordin plui âlt e a furnissin stimis precis dome pai autovalôrs plui bas. Si che duncje, lis aplicacions reâls a compuartin, par lôr nature, *problemis inviers finîts* e di cumò indenant si assum che i dâts spetrâi disponibii a sedin

$$\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N), \text{ cun } \Lambda_n = \lambda_n(q^*), \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.4)$$

Il probleme inviers di determinâ q^* in mût che $\lambda_n(q^*) = \Lambda_n$ par ogni $n = 1, \dots, N$ nol à une soluzion univoche e, duncje, al covente introdusi une definizion *diverse* di soluzion. Al è avonde naturâl domandâ che il potenziâl $q(x)$ al sodisfi lis cundizions

$$\lambda_n(q) = \lambda_n(q^*), \quad n = 1, \dots, N \text{ (o, almancul, } \lambda_n(q) \simeq \lambda_n(q^*)) \quad (3.5)$$

e, cun di plui, al sarès miôr che la identificazion e puartàs a une aprossimazion di q^* cuant che $N \rightarrow +\infty$ (e, tal stes timp, che al fos garantide la unicitât). Cualchidun di chescj aspiets al sarà tratât in curt tes sezions sucessivis.

3.2.2 Continuitât dai autovalôrs

La continuitât dai autovalôrs a pet dal coeficient no cognossût $q(x)$ e je une cuistion fundamentâl te nestre analisi e e vignarà esaminade chi di seguit.

Scomencìn introdusint l'insiemi dai potenziâi. Dade une costante $H > 0$, o definìn l'insiemi $\mathcal{C}_H$ dai potenziâi limitâts:

$$\mathcal{C}_H = \{q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid |q(x)| \leq H\}. \quad (3.6)$$

Dotìn $\mathcal{C}_H$ de norme

$$\|q\|_{2L^1} = \int_0^1 \left| \int_0^x \int_0^{x_2} q(x_1) dx_1 dx_2 \right| dx. \quad (3.7)$$

Il risultât seguitîf al derive di Barnes (1991).

Teoreme 3.1. *Al sedi $\lambda_n(q)$ l'n-esim autovalôr di (3.1), cun $q \in \mathcal{C}_H$. E esist une costante $K(n, H)$ che e dipent dome di n e H , cussì che par ogni $q_1, q_2 \in \mathcal{C}_H$ o vin*

$$|\lambda_n(q_1) - \lambda_n(q_2)| \leq K(n, H) \|q_1 - q_2\|_{2L^1}. \quad (3.8)$$

Comentìn la stime (3.8) e analizìn lis sôs consecuençis.

La stime (3.8) e aferme che piçulis perturbazions inte norme $2L^1$ di q a produsin piçulis variazioms dai autovalôrs. Si che duncje, la *uniche* informazion che e pues jessi estrate di un numar finît di autovalôrs e je une aprossimazion L^1 de funzion $\int_0^x \int_0^t q(s) ds dt$. Cun di plui, ogni metodi che al smiri a dedusi une aprossimazion puntuâl di $q(x)$ doprant un numar finît di autovalôrs al sarà ostacolât dal malcondizionament prodot de dople derivazion di une aprossimazion L^1 a $\int_0^x \int_0^t q(s) ds dt$.

Par capî miôr il contignût di (3.8) o perturbìn il potenziâl $q^*(x)$ cun $\Delta q(x) = a \cos bx$, cun a, b numars reâi no nui. Indicant $q(x) = q^*(x) + \Delta q(x)$, un calcul sempliç al mostre che

$$\begin{aligned} \|q - q^*\|_{2L^1} &= \left| \frac{a}{b^2} \right| \int_0^1 |\cos bx - 1| dx \leq 2 \left| \frac{a}{b^2} \right|, \\ \|q - q^*\|_{L^1} &= |a| \int_0^1 |\cos bx| dx \leq |a|, \\ \|q - q^*\|_{L^2} &= \frac{|a|}{2} \left(1 + \frac{\sin 2b}{2b} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si pues viodi che $\|q - q^*\|_{2L^1}$ al è arbitrariementri piçul ancje se a al è grant cuant che b al è grant (e dal ordin di a , par esempi). Al contrari, lis normis $\|q - q^*\|_{L^1}$, $\|q - q^*\|_{L^2}$, $\|q - q^*\|_{L^\infty}$ a son grandis indipendentmentri dal valôr di b . Chest al dimostre che une perturbazion $a \cos bx$ zontade a un coeficient q^* cun a grant e b grant (e dal stes ordin di a) e prodûs piçulis variazioms suntun numar finît di autovalôrs e, duncje, e pues jessi considerade ancjemò tant che une aprossimazion ae soluzion dal probleme inviers intal sens di (3.4). La presince di tiermins che a ossilin une vore cun ampece grande, tant che $\Delta q(x) = a \cos bx$ cun a e b grancj, e distrûç, al è clâr, la cualitât di une ricostruzion di $q^*(x)$. E cheste e je une grande dificolât cuant che si à a ce fâ cuntun probleme inviers ai autovalôrs cun dâts finîts.

La zonte di dâts spetrâi che a vegnin di altris cundizioms al contor no garantìs une aprossimazion puntuâl plui acurade di $q^*(x)$. In realtât,

cuant che il coeficient al è plui regolâr, al pues sucedi che la continuitât dai autovalôrs e sedi vere in topologjiis di $\mathcal{C}_H$ plui debii de topologjie indote de norme $2L^1$. Di consequence, lis informazions che a puedin jessi estratis su $q^*(x)$ a son ancjemò mancûl di chês che a puedin jessi dedotis doprant la norme $2L^1$. Al è par chest motif che al è interessant cjatâ, o almancul apossimâ, la topologjie plui debile di $\mathcal{C}_H$ là che ducj i autovalôrs a son continuis a pet dal coeficient $q(x)$. Chest pont al sarà calcolât inte sezion successive. Infin, o riclamìn che, se une topologjie di $\mathcal{C}_H$ e je plui debile di une altre, o sedi e à mancûl insiemis vierts,alore e à plui insiemis compats, e i insiemis compats a àn un rûl culminatîf inte dimostrazion dai teorems di existence pai problemis inviers.

3.2.3 Topologjiis debilis

O sclarìn culi parcè che al è interessant indebilî simpri plui la topologjie dal insiem dai coeficients $\mathcal{C}_H$. Prin di dut, o riclamìn cualchi fat fondamentâl.

Al sedi X un insiem no vuet. Une famee τ di sotinsiemis di X e je une topologjie di X se:

- i) $\emptyset$ e X a fasin part di τ ;
- ii) se $O_i \in \tau$, $i = 1, \dots, M$, alore $\bigcap_{i=1}^M O_i \in \tau$;
- iii) ae $O_\alpha \in \tau$, $\alpha \in J$, là che J al è un insiem di indiçs, alore $\bigcup_{\alpha \in J} O_\alpha \in \tau$,

o ben, la intersezion finide dai elements di τ e parten a τ e la union dai elements di τ e parten a τ . I elements di τ a son clamâts insiemis vierts di X . La cubie (X, τ) e je clamade spazi topologjic.

A sedin τ e τ' dôs topologjiis di X . τ' e je plui debile di τ se τ' e je contignude in τ , o sedi $\tau' \subset \tau$.

E sedi $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ une funzion tra doi spazis topologjics. f e je une funzion continue se e dome se par ogni insiem viert V di Y , l'insiem $f^{-1}(V)$ al è un insiem viert di X .

Cumò, tornìn al nestri probleme dai autovalôrs inviers (cun dâts infinîts) e denotìn cun $\mathcal{S}$ l'insiem di dutis lis secuencis infinidis $\{a_1, a_2, \dots\}$ di numars reâi. O introdusìn la mape

$$\Phi : \mathcal{C}_H \rightarrow \mathcal{S}, \quad \Phi(q) = \{\lambda_1(q), \lambda_2(q), \dots, \lambda_n(q), \dots\} \equiv \boldsymbol{\lambda}(q) \quad (3.10)$$

e al sedi $\Phi(\mathcal{C}_H) = \mathcal{S}_H \subset \mathcal{S}$. *Suponìn* che il probleme inviers infinît al vedi une soluzion uniche. O desiderìn invertî Φ e determinâ $\Psi = \Phi^{-1}$, cun

$$\Psi : \mathcal{S}_H \rightarrow \mathcal{C}_H, \quad \Psi(\lambda(q^*)) = q^*, \quad (3.11)$$

par dâts spetrâi disponibii $\lambda(q^*) = \{\lambda_1(q^*), \lambda_2(q^*), \dots, \lambda_n(q^*), \dots\}$. In particulâr, o volaressin che la funzion Ψ e fos une funzion continue, in mût che piçulis variaziions sui dâts spetrâi a produsessin piçulis variaziions sul coeficient, o sedi che par ogni insiemì viert V di $\mathcal{C}_H$, l'insiemì $\Psi^{-1}(V)$ al fos un insiemì viert di $\mathcal{S}_H$. A clâr, la pussibilitât di vê la funzion Ψ continue e cres al calâ dal numar di insiemis vierts di $\mathcal{C}_H$, e chest nus da une spiegazion euristiche dal interès di rindi simpri plui debile la topologjie di $\mathcal{C}_H$.

O definìn une topologjie su $\mathcal{S}_H$ doprant il criteri di convergence par components: par $\{q_j\} \subset \mathcal{C}_H$ e $q^* \in \mathcal{C}_H$, o disìn che

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \lambda(q_j) = \lambda(q^*) \iff \text{par ogni } n \geq 1 \text{ si à } \lim_{j \rightarrow +\infty} \lambda_n(q_j) = \lambda_n(q^*). \quad (3.12)$$

O definìn in $\mathcal{C}_H$ la *topologjie plui debile* là che ducj i autovalôrs a son funziions continuis dal potenziâl, o ben

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} q_j = q^* \iff \text{par ogni } n \geq 1 \text{ si à } \lim_{j \rightarrow +\infty} \lambda_n(q_j) = \lambda_n(q^*). \quad (3.13)$$

Ae lûs de analisi dal probleme inviers finît, che nol pues jessi risolt in mût univoc, o sin puartâts a introdusi cheste definizion. Une sequeunce $\{q_N(x)\} \subset \mathcal{C}_H$ e *interpolate* i dâts spetrâi $\{\lambda_n(q^*)\}$ se par ogni N al esist ϵ_N cussì che

$$|\lambda_n(q_N) - \lambda_n(q^*)| < \epsilon_N \text{ par ogni } n = 1, \dots, N, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \epsilon_N = 0. \quad (3.14)$$

Chest teoreme, elaborât di Barnes (1991), al evidenzie la impuortance di vê une sequeunce interpolante di coeficients. O introdusìn prin di dut la norme *1Max* in $\mathcal{C}_H$:

$$\|q\|_{1Max} = \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x q(t) dt \right|. \quad (3.15)$$

Teoreme 3.2. *Suponìn che il probleme dai autovalôrs infinîts al vedi une soluzion uniche par dâts spetrâi disponibii $\{\lambda_n(q^*)\}_{n=1}^\infty$. E sedi*

$\{q_N(x)\} \subset \mathcal{C}_H$ une secuencia cualsisedi che e interpolate i dâts $\{\lambda_n(q^*)\}_{n=1}^\infty$.
Alore

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|q_N - q^*\|_{1Max} = 0. \quad (3.16)$$

Il teoreme al dimostre che une secuencia interpolante di coeficients e converç e che dâts infinîts (suficients par garantî la unicitât) a contegnin une apossimazion uniforme de integrâl $\int_0^x q^*(s)ds$. I risultâts otignûts di Hald e McLaughlin (che si viodin lis ecuazions (3.2) e (3.3)) a dimostrin in efets che i dâts infinîts a contegnin tant plui di chest. In ogni câs, par otignî une apossimazion puntuâl $q^*(x)$, la apossimazion uniforme e à di jessi diferenziade une volte.

Par sfortune, il Teoreme 3.2 no si apliche al probleme inviers finît. Par chest probleme, difat, i dâts disponibii no bastin par calculâ N grant avonde. I Teoremi 3.1 e 3.2 a furnissin une sorte di limit “inferiôr” e “superiôr” (forsit apossimatîf) aes informazions contignudis intai dâts spetrâi finîts e infinîts. In chest sens, il Teoreme 3.1 e je une prime stime apossimative de topologjie plui debile di $\mathcal{C}_H$ li che ducj i autovalôrs a son continuis.

O concludin riclamant il fat che, a man a man che il coeficient q al devente plui regolâr, al è pussibil costruî topologiis plui debilis su $\mathcal{C}_H$ li che ducj i autovalôrs a son continuis. Par esempi, sedi $\mathcal{C}_{H,V}$ il sotinsiemi des funziions $q \in \mathcal{C}_H$ che a àn variazion totâl al massim V (o podin assumi par definizion che une funzion cun variazion totâl limitade e sedi la difference tra dôs funziions monotonis). Alore e esist une costante $K(n, H, V)$ cussì che par ogni $q_1, q_2 \in \mathcal{C}_{H,V}$ o vin

$$|\lambda_n(q_1) - \lambda_n(q_2)| \leq K(n, H, V) \|q_1 - q_2\|_{3Max}, \quad (3.17)$$

dulà che

$$\|q\|_{3Max} = \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} q(x_1) dx_1 dx_2 dx_3 \right|. \quad (3.18)$$

Chest al dimostre che une cuantitât finide di dâts e pues produsi, al massim, une apossimazion uniforme di $\int_0^x \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} q(x_1) dx_1 dx_2 dx_3$. Par cjatâ une apossimazion puntuâl di $q(x)$ al covente derivâ trê voltis cheste apossimazion uniforme. Cun di plui, pes funziions $q \in \mathcal{C}_{H,V}$ cun $|q'(x)| \leq L$, al è pussibil dimostrâ che

$$|\lambda_n(q_1) - \lambda_n(q_2)| \leq K(n, H, V, L) \|q_1 - q_2\|_{3L^1}, \quad (3.19)$$

dulà che

$$\|q\|_{3L^1} = \int_0^1 \left| \int_0^{x_4} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} q(x_1) dx_1 dx_2 dx_3 \right| dx_4, \quad (3.20)$$

e par rivâ a une aprossimazion puntuâl di q si à di calcolâ trê derivadis di une aprossimazion L^1 di $\int_0^{x_4} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} q(x_1) dx_1 dx_2 dx_3$.

3.3 Il metodi dai coeficients gjeneralizâts di Fourier: teorie. In cheste sezion o presentìn lis basis teorichis di un metodi di identificazion aplicât a une nanotrâf sometude a vibrazion assiâl, là che o savìn a priori che il supuart de variazion di masse al parten a metât de trâf e i autovalôrs doprâts tant che dâts a partegnin a un sôl spetri. Inte sô essence, il metodi si base suntune seculence iterade di linearizacions dal probleme inviers intun intor de configurazion di riferiment.

3.3.1 Formulazion dal probleme de identificazion di masse

La vibrazion assiâl libare infinitesimal ae frecuece (radiant) $\omega = \sqrt{\lambda}$ di une nanotrâf *no perturbade* o *referenziâl* uniforme fissade-fissade (o ben, fissade a ducj i doi i cjâfs) di lungjece L e je guviernade dal probleme dai autovalôrs (Akgoz e Civalek, 2014)

$$\begin{cases} bv^{IV} - av'' = \lambda \rho_0 v, & x \in (0, L), \\ v(0) = 0, \quad v''(0) = 0, \\ v(L) = 0, \quad v''(L) = 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

Al sedi λ l'autovalôr e e sedi $v = v(x)$ l'autofunzion corispondente. Il coeficient $\rho_0 = \text{costante}$, $\rho_0 > 0$, al è la densitât di masse par unitât di lungjece e $a > 0$ e $b > 0$ a son i coeficients di rigjiditât de fuarce assiâl di prin e secont ordin, par esempi $N(v) = av'$ e $N^h(v) = bv''$, che si viodi (2.81) pe espression complete.

La seculence di autocubiis $\{\lambda_n, v_n(x)\}_{n=1}^\infty$ di (3.21) e je dade di

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left[\frac{1}{\rho_0} \left(a + b \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right) \right], \quad v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (3.22)$$

dulà che e je stade doprade cheste cundizion di normalizazion de masse

$$\int_0^L \rho_0 v_n^2(x) = 1, \quad n \geq 1. \quad (3.23)$$

Si à di notâ che la secunce $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ de nanotrâf no perturbade e je *discrete in maniera uniforme*, o sedi e esist une costante di separazion $\sigma > 0$, che e dipent dome dai parametris dal sisteme, cussì che

$$|\lambda_n - \lambda_m| \geq \sigma, \quad (3.24)$$

par ogni $m, n \in \mathbb{N}$, cun $m \neq n$. In particulâr, un calcul diret al dimostre che

$$\sigma = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left[a + 2b \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right]. \quad (3.25)$$

Suponìn che la masse par unitât di lungjece de nanotrâf e cambii e denotìn cun

$$\rho(x) = \rho_0 + r_\epsilon(x), \quad x \in [0, L], \quad (3.26)$$

la densitât di masse par unitât di lungjece de nanotrâf *perturbade*. O assumìn chestis ipotesis su la perturbazion r_ϵ .

i) Perturbazion L^2 e piçulece:

$$\left(\frac{1}{L} \int_0^L (r_\epsilon(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon \rho_0, \quad (3.27)$$

dulà che il parametri di perturbazion ϵ al è un numar reâl cussì che $0 < \epsilon \leq \hat{\epsilon}$, cuntun numar ridot che o sielzarìn plui indevant $\hat{\epsilon} < 1$.

ii) Regularitât:

$$r_\epsilon(x) \in L^\infty([0, L]). \quad (3.28)$$

iii) Limits inferiôr e superiôr uniformis:

$$0 < \rho^- \leq \rho(x) \leq \rho^+, \quad x \in [0, L], \quad (3.29)$$

cun $\rho^-, \rho^+, \rho^+ \geq \rho_0 + \|r_\epsilon\|_\infty$, costantis independentis di ϵ .

La piçulece de variazion di masse $r_\epsilon(x)$ esprimude in (3.27) nus permet di calculâ sedi perturbazions di piçule ampiece dadis su grandis porzioni dal interval $[0, L]$ (par esempi, variazions di masse difondudis), sedi perturbazions cun valôrs alts concentrâts in piçulis parts di $[0, L]$. Cun di plui, al va notât che il probleme de identificazion de masse intes nanotrâfs al compuarte variazions *positivis* de densitât di masse ρ_0 , o sedi $r_\epsilon(x) \geq 0$ in $[0, L]$. Al è difilcil cjapâ dentri chest vincu te nestre

analisi. Al è stât doprât in (Dilena et al., 2020) par cerni a posteriori i risultâts de ricostruzion.

Segnìn cun $\{\lambda_n(\rho), v_n(x; \rho)\}_{n=1}^\infty$ lis autocubiis (3.21) cuant che il coefficient ρ_0 al è rimplaçât di $\rho(x)$, o ben

$$\begin{cases} bv^{IV} - av'' = \lambda \rho v, & x \in (0, L), \\ v(0) = 0, \quad v''(0) = 0, \\ v(L) = 0, \quad v''(L) = 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

Su la fonde des nestris ipotesis i)-iii), par cualsisedi ϵ , $0 < \epsilon \leq \hat{\epsilon}$, il probleme dai autovalôrs (3.21) al manten ancjemò lis proprietâts dal probleme dai autovalôrs no perturbât, e o segnarìn cun $\{\lambda_n(\rho), v_n(x; \rho)\}_{n=1}^\infty$, lis *autocubiis perturbadis*, cun $0 < \lambda_1(\rho) < \dots < \lambda_n(\rho) < \dots$ e cun $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\rho) = +\infty$. In cheste sezion si concentrarìn su chest probleme:

Dade la nanotrâf no perturbade, recuperâ la masse zontade $r_\epsilon(x)$ de cognossince dai autovalôrs finîts $\{\lambda_n(\rho)\}_{n=1}^N$.

Visantsi che la cognossince di un singul spetri complet nol è sufficient par determinâ in mût univoc un coefficient gjenerâl $r_\epsilon(x)$ (che si viodi Schueller (2001) e, pai operadôrs di Sturm-Liouville Hochstadt e Lieberman (1978)), o formulìn achì un probleme inviers misc daûr di tip Hochstadt-Lieberman cun dâts finîts, là che il coefficient di masse al è cognossût in metât de nanotrâf, o sedi la variazion di masse $r_\epsilon(x)$ e à supuart contignût in $(0, L/2)$:

$$\text{supuart}(r_\epsilon(x)) = \overline{\{x \in [0, L] \mid r_\epsilon(x) \neq 0\}} \subset \left(0, \frac{L}{2}\right). \quad (3.31)$$

Indichìn tant che *dâts a priori* l'insiemi $\mathcal{A}$ des cuantitâts che a definissin il model di nanotrâf no perturbade e i limits inferiôr e superiôr uniformis de densitât di masse dal model perturbât $\rho(x)$:

$$\mathcal{A} = \{a, b, \rho_0, L, \rho^-, \rho^+\}. \quad (3.32)$$

La costante di separazion σ de nanotrâf no perturbade e dipent des cuantitâts a priori $\mathcal{A}$, e duncje no je cjapade dentri in maniere esplicite in $\mathcal{A}$.

3.3.2 Sensibilitât de autofrecuence ae masse zontade

Te part seguitive, o doprarìn une espression esplicite de perturbazion di prin ordin dai autovalôrs rispjet al parametri ϵ . Visìnsi che la n -

esime cubie di autovalôrs no perturbade e perturbade a son indicadis rispetivementri cun $\{\lambda_n, v_n\}$ e $\{\lambda_n(\rho), v_n(\rho)\}$.

O premetìn un risultât di continuitât des autocubiis di (3.30) rispjet aes L^2 -perturbazions dal coeficient di masse e une identitât utile.

Teoreme 3.3. *Cu la notazion parsore ripuartade, al sedi $\rho_i(x) = \rho_0 + r_{\epsilon,i}(x)$, dulà che $r_{\epsilon,i}(x)$ al sodisfe (3.27)–(3.29), $i = 1, 2$.*

Al sedi $\{\lambda_n(\rho_i), v_n(x; \rho_i)\}$, $n \geq 1$, e sedi la n -esime cubie di autovalôrs di (3.30) par $i = 1, 2$.

Par ogni $n \geq 1$, e esist une costante $C_n^\lambda > 0$, che e dipent dome dai dâts a priori e n , cussì che

$$|\lambda_n(\rho_1) - \lambda_n(\rho_2)| \leq C_n^\lambda \|\rho_1 - \rho_2\|_{L^2([0,L])}. \quad (3.33)$$

Normalizìn lis autofunziions $v_n(x; \rho_1)$, $v_n(x; \rho_2)$ in mût che

$$\int_0^L \rho_1 v_n^2(x; \rho_1) = \int_0^L \rho_2 v_n^2(x; \rho_2) = 1 \quad (3.34)$$

e $v'_n(0; \rho_1)v'_n(0; \rho_2) > 0$, $n \geq 1$. Par ogni $n \geq 1$, al esist un numar $\hat{\epsilon}$, $0 < \hat{\epsilon} < 1$, e une costante $C_n^v > 0$ e, sedi il numar sedi la costante, a a dipendin dome dai dâts a priori e n , cussì che

$$\|v_n(x; \rho_1) - v_n(x; \rho_2)\|_{L^2([0,L])} \leq C_n^v \|\rho_1 - \rho_2\|_{L^2([0,L])}, \quad (3.35)$$

par ogni ρ_1, ρ_2 che al sodisfe $\|\rho_1 - \rho_2\|_{L^2([0,L])} \leq L^{\frac{1}{2}}\hat{\epsilon}$.

Lis cuantitâts seguitivis a son definidis tant che difference tra cuantitâts perturbadis e no perturbadis::

$$\Delta\lambda_n = \lambda_n(\rho) - \lambda_n, \quad \Delta v_n = v_n(\rho) - v_n, \quad \Delta\rho = \rho - \rho_0 = r_\epsilon, \quad n \geq 1. \quad (3.36)$$

Leme 3.4. *Par ogni $n \geq 1$ o vin*

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_n = & -\lambda_n \int_0^L (\Delta\rho)v_n^2 - \lambda_n \int_0^L \Delta\rho(\Delta v_n)v_n - \Delta\lambda_n \int_0^L \rho_0(\Delta v_n)v_n - \\ & - \Delta\lambda_n \int_0^L (\Delta\rho)v_n^2 - \Delta\lambda_n \int_0^L (\Delta\rho)(\Delta v_n)v_n. \end{aligned} \quad (3.37)$$

La identitât che o vin ripuartât parsore e pues jessi otignude multiplacant la ecuazion diferenziâl in (3.21) (scrite pe n -esime autofunzion no perturbade $v_n(x)$) e chê in (3.30) (scrite pe n -esime autofunzion perturbade $v_n(x; \rho)$) rispetivementri par $v_n(x; \rho)$ e $v_n(x)$, e integrant par parts. Sottraint i doi tiermins, doprant la simetrie dal operadôr e la cundizion di normalizazion (3.23), si oten la ecuazion (3.37).

Doprant lis stimis (3.33), (3.35) inte identitât (3.37), par $0 < \epsilon \leq \hat{\epsilon}$, la variazion di prin ordin rispjet a ϵ dal n -esim autovalôr e je dade di

$$\lambda_n(\rho) = \lambda_n - \lambda_n \int_0^{\frac{L}{2}} r_\epsilon(x) v_n^2(x) dx, \quad (3.38)$$

par ogni $n \geq 1$ e par r_ϵ che e sodisfe ancje (3.31).

Comentî la espression (3.38). Come che si spietisi su la fonde de teorie gjenerâl (che si viodi, par esempi, Courant e Hilbert (1966)), la espression (3.38) e aferme che la zonte di masse e provoche un sbassament di ducj i autovalôrs. Cun plui precision, la variazion dai autovalôrs $(\lambda_n(\rho) - \lambda_n)$ e risulde jessi proporziônâl a λ_n . Chest fat al somee che al vedi une cierte impuartance intal nestri probleme inviers, stant che la variazion relative dai autovalôrs e aparîs significative ancje par n di ordin alt. In ultin, al va notât che la espression (3.38) e je indipendente des cundizions al contor dal probleme dai autovalôrs e, duncje, la analisi e podarès jessi slargjade ancje a altris insiemis di cundizions al contor de nanotrâf.

3.3.3 Il probleme inviers linearizât

In cheste sezion o doprarin la sensibilitât dai autovalôrs determinade in (3.38) par formulâ une version linearizade dal probleme inviers intun intor de nanotrâf no perturbade e par cjetâ une soluzion aprossimade.

Doprant la espression esplicite des autofunzions no perturbadis (3.22) in (3.38), par ogni $n \geq 1$ o vin

$$\begin{aligned} \delta \lambda_n &\equiv 1 - \frac{\lambda_n(\rho)}{\lambda_n} = \int_0^{\frac{L}{2}} r_\epsilon(x) \Phi_n(x) dx, \\ \Phi_n(x) &\equiv (v_n(x))^2 = \frac{2}{\rho_0 L} \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

che al mostre che la variazion relative di prin ordin dal n -esim autovalôr e coincît cul prodot scalâr tra la variazion di masse discognossude $r_\epsilon(x)$

e l' n -esim element de famee des *funzions di influence* $\{\Phi_m(x)\}_{m=1}^\infty$. Al è propit a chest pont che e jentre in zûc la cundizion a priori (3.31) cemût che al mostre il leme chi daûr.

Leme 3.5. *La famee $\{\Phi_m(x)\}_{m=1}^\infty$ e je une base des funzions di cuadrât integrabil definidis sul mieç interval de nanotrâf, par esempi l'insiemi $L^2(0, \frac{L}{2})$.*

Cheste proprietât e derive dal fat che lis funzions $\{\Phi_m(x)\}_{m=1}^\infty$ a son *linearmentri independentis* e a formin une *famee complete* in $L^2(0, \frac{L}{2})$, par esempi, par ogni $r_\epsilon(x) \in L^2(0, \frac{L}{2})$, lis cundizions $\int_0^{\frac{L}{2}} r_\epsilon(x) \Phi_m(x) dx = 0$ par ogni $m \geq 1$ a implichin $r_\epsilon(x) = 0$ in $(0, \frac{L}{2})$.

Par determinâ $r_\epsilon(x)$, une sielte naturâl sugjeride dal Leme 3.5 e je chê di rapresentâ $r_\epsilon(x)$ su la famee $\{\Phi_m(x)\}_{m=1}^\infty$ tant che

$$r_\epsilon(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \Phi_k(x) \chi_{[0, \frac{L}{2}]}, \quad (3.40)$$

dulà che $\chi_I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e je la funzion carateristiche dal interval sierât $I \subset \mathbb{R}$: $\chi_I(x) = 1$ if $x \in I$, $\chi_I(x) = 0$ if $x \in \mathbb{R} \setminus I$. I coeficients $(\beta_k)_{k=1}^\infty$ a fasin il rûl di coeficients gjeneralizâts di Fourier de variazion di masse $r_\epsilon(x)$ discognossude valutade su la famee $\{\Phi_m(x)\}_{m=1}^\infty$.

Tes aplicazions reâls al è disponibil dome un numar finît di autovalôrs, disîn $(\lambda_1^{exp}, \dots, \lambda_N^{exp})$, cun $N = 10 \div 20$. Chest nus puarte a calcolâ la N -esime approssimazion dimensionâl finide de masse zontade:

$$r_\epsilon^N(x) = \sum_{k=1}^N \beta_k \Phi_k(x) \chi_{[0, \frac{L}{2}]}, \quad \beta_k = 0 \quad \text{par ogni } k \geq N+1. \quad (3.41)$$

Se o sostituìn (3.41) in (3.40) cun $\lambda_n(\rho) = \lambda_n^{exp}$ par ogni $n = 1, \dots, N$, dulà che λ_n^{exp} al è l' n -esim autovalôr misurât, o otignìn il sisteme lineâr $N \times N$

$$\delta \lambda_n = \sum_{k=1}^N A_{nk} \beta_k, \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.42)$$

$$A_{nk} = \int_0^{\frac{L}{2}} \Phi_n(x) \Phi_k(x) dx = \frac{4}{(\rho_0 L)^2} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx,$$

$n, k = 1, 2, \dots$. I coefficients A_{nk} a puedin jessi valutâts in forme sierade

$$A_{nk} = \frac{2}{4\rho_0^2 L} \quad \text{for } k \neq n, \quad A_{nn} = \frac{3}{4\rho_0^2 L}$$

e un calcul diret al mostre che

$$\det(A_{nk}) = (2N + 1) \left(\frac{1}{4\rho_0^2 L} \right)^N, \quad (3.43)$$

$$(A_{nk})^{-1} = (4\rho_0^2 L) \frac{2N - 1}{2N + 1} \quad \text{if } n = k, \quad (A_{nk})^{-1} = -(4\rho_0^2 L) \frac{2}{2N + 1} \quad \text{if } n \neq k,$$

$n, k = 1, \dots, M$. Si che duncje, il sisteme (3.42) al à la soluzion in forme sierade che o viodin chi daûr

$$\beta_k = 4\rho_0^2 L \left(\delta\lambda_k - \frac{2}{2N + 1} \sum_{j=1}^N \delta\lambda_j \right), \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.44)$$

e, in ultin,

$$r_\epsilon(x) = 8\rho_0 \sum_{k=1}^N \left(\delta\lambda_k - \frac{2}{2N + 1} \sum_{j=1}^N \delta\lambda_j \right) \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \cdot \chi_{[0, \frac{L}{2}]}. \quad (3.45)$$

3.3.4 Une procedure di ricostruzion iterative

La stime di r_ϵ che o vin dât in (3.45) e pues jessi miorade iterant la procedure di identificazion ilustrade te sezion di prime. Par simplificâ la notazion, chi l'indici ϵ al è stât ometût e λ_n^{exp} al indiche il valôr misurât dal n -esim autovalôr de nanotrâf perturbade. I passaçs principâi de procedure di ricostruzion e l'algoritmi numeric corispondent a son ilustrâts di file.

Suponìn che $\rho^{(0)}(x) = \rho_0$ e sedi la masse par unitât di lungjece de nanotrâf di riferiment. La masse discognossude par unitât di lungjece e je determinade, midiant de iterazion, sul interval $[0, \frac{L}{2}]$

$$\rho^{(j+1)}(x) = \rho^{(j)}(x) + r^{(j)}(x), \quad j \geq 0, \quad (3.46)$$

dulà che l'incressiment

$$r^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^N \beta_k^{(j)} \Phi_k^{(j)}(x) \chi_{[0, \frac{L}{2}]} = \boldsymbol{\beta}^{(j)} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{(j)}(x) \chi_{[0, \frac{L}{2}]} \quad (3.47)$$

al è determinât risolvint il sisteme lineâr $N \times N$

$$\delta\lambda_n^{(j)} \equiv 1 - \frac{\lambda_n^{exp}}{\lambda_n(\rho^{(j)})} = \sum_{k=1}^N A_{nk}^{(j)} \beta_k^{(j)},$$

$n = 1, \dots, N$, o, in maniere ecuivalente, in forme compate

$$\mathbf{A}^{(j)} \boldsymbol{\beta}^{(j)} = \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\lambda}^{(j)}, \quad (3.48)$$

cun $\boldsymbol{\beta}^{(j)} = (\beta_1^{(j)}, \dots, \beta_N^{(j)})$ e $\boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\lambda}^{(j)} = (\delta\lambda_1^{(j)}, \dots, \delta\lambda_N^{(j)})$. Chi, la cubie $\{\lambda_n(\rho^{(j)}), v_n(x; \rho^{(j)})\}$ e la n -esime autocubie (normalizade in masse) dal probleme

$$\begin{cases} bv^{IV} - av'' = \lambda \rho^{(j)} v, & x \in (0, L), \\ v(0) = 0, \quad v''(0) = 0, \\ v(L) = 0, \quad v''(L) = 0. \end{cases}$$

Cun di plui, $\Phi_k^{(j)}(x) = v_k^2(x; \rho^{(j)})$ e la matric $(A_{nk}^{(j)})$ e je dade di

$$A_{nk}^{(j)} = \int_0^{\frac{L}{2}} \Phi_n^{(j)}(x) \Phi_k^{(j)}(x) dx, \quad n, k = 1, \dots, N.$$

Suponint la esistence di $(\mathbf{A}^{(j)})^{-1}$ (che si viodi la prossime sotsezion, Passaç i)), o vin

$$r^{(j)}(x) = (\mathbf{A}^{(j)})^{-1} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\lambda}^{(j)} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{(j)}(x) \chi_{[0, \frac{L}{2}]} \quad (3.49)$$

e, di (3.46), o otignìn

$$\rho^{(j)}(x) = \rho_0 + \sum_{i=0}^{j-1} r^{(i)}(x), \quad j \geq 1. \quad (3.50)$$

Intes nestris aplicazions, lis iterazions a continuin fin cuant che il coefficient di masse inzornât al sodisfe il criteri

$$e \equiv \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{\lambda_n^{exp} - \lambda_n(\rho^{(j+1)})}{\lambda_n^{exp}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \gamma, \quad (3.51)$$

par un piçul numar dât γ .

3.3.5 Cualchi risultât di convergience

O vin viodût che il nestri metodi di ricostruzion si base suntune secunce di linearizacions dal probleme inviers intun intor de nanotrâf no perturbade. Chi o calcolin la convergience dal metodi iteratîf mostrât inte ultime sotsezion. Il risultât principâl al è riassumût in chest teoreme.

Teoreme 3.6. *Al esist $\hat{\epsilon}_\rho$, $0 < \hat{\epsilon}_\rho < 1$ e $\hat{\epsilon}_\rho$ dependent dome dai dâts a priori, cussì che se $|\delta\lambda^{(0)}| \leq \hat{\epsilon}_\lambda < 1$, alore la procedure iterative di identificazion e converç uniformementri a une funzion $\bar{\rho} = \bar{\rho}(x)$ che e je continue in $[0, \frac{L}{2}]$.*

Il risultât al aferme che la procedure iterative e je convergjente, a cundizion che la variazion di masse discognossude e sedi piçule avonde e che i autovalôrs sperimentâi a sedin dongje avonde ai autovalôrs no perturbâts. La dimostrazion si base su trê passaçs principâi.

Passaç i) Esistence de invierse $(\mathbf{A}^{(j)})^{-1}$ e limit di $\|(\mathbf{A}^{(j)})^{-1}\|$ a ogni pas iteratîf $j \geq 1$: al derive dal fat che la invierse $(\mathbf{A}^{(0)})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$ e esist al prin pas de iterazion (che si viodi (3.43)) e che la matricj gjeneriche $\mathbf{A}^{(j)}$ e je une piçule perturbazion di $\mathbf{A}$.

Passaç ii) Limitazion di $|\delta\lambda^{(j)}|$ par controlâ la soluzion di $\mathbf{b}^{(j)}$ a (3.49) a ogni pas iteratîf $j \geq 1$: al derive essenzialmentri di une stime atente dai tiermins di ordin superiôr a un su la bande a drete di (3.37) in tiermins di $|\delta\lambda^{(0)}|$. Si oten che $|\lambda_n(\rho^{(j)}) - \lambda_n^{exp}| \leq C|\delta\lambda^{(0)}|^{2^j}$ a ogni iterazion $j \geq 1$, dulà che $C > 0$ e je une costante che e dipent dome dai dâts a priori.

Passaç iii) Convergience de serie $\sum_{i=0}^{\infty} r^{(i)}(x)$ in (3.50): e derive dal fat che il i -esim tiermin al pues jessi limitât come $\|r^{(i)}(x)\|_{L^2([0, L/2])} \leq C|\delta\lambda^{(0)}|^{2^i}$, $i \geq 0$, dulà che $C > 0$ e je une costante che e dipent dome dai dâts a priori.

Pai details tecnicos de dimostrazion si rimande a Dilena et al. (2019b).

Al è clâr che il teoreme parsore ripuartât nol permet dal sigûr di concludi che la funzion limit $\bar{\rho}$ e coincide in efets cu la distribuzion di masse *obietîf*. Di fat, par analogjie cun problemis spetrâi inviers analics, si spietin che la unicitât e sedi garantide dome cuant che a son disponibii autovalôrs “infinîts”.

I risultâts di une serie grande di simulazions, che a saran in part ilustradis tal paragraf sucessîf, a dimostrin che la funzion $\bar{\rho}$ e je in efets une buine aprossimazion dal coeficient di masse obietîf ρ par variazions

di masse piçulis e regolârs r_ϵ , al cressi dal numar N des primis frecuencis naturâls cjapadis dentri inte identificazion. In ogni câs, fin cumò, la teorie matematiche ae base di chest probleme inviers no sclaris parcè che $\bar{\rho}$ al risulte jessi dongje dal coeficient di masse efetif ρ . Un contribût al sclariment di chest pont al è presentât intal risultât sucessîf.

Teoreme 3.7. *Ipotizin che $r_\epsilon(x)$ al sedi tâl di sodisfâ lis ipotesis (3.27)-(3.29), (3.31) e, cun di plui, $r_\epsilon(x) \in C^1([0, \frac{L}{2}])$ e $\|r_\epsilon''\|_{L^1([0, L/2])}$ al è finît. Alore*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} r_\epsilon^{(0)}(x) = r_\epsilon(x), \quad \text{for } x \in \left(0, \frac{L}{2}\right), \quad (3.52)$$

dulà che $r_\epsilon^{(0)}(x)$ al denote la variazion di masse determinade al prin pas de procedure iterative de espression (3.45).

In altris peraulis, il coeficient di masse determinât risolvint il probleme inviers linearizât al converç in maniere puntuâl al coeficient obietif cuant il numar di autofrecuencis dopradis inte analisi al tint al infinît.

3.4 Il metodi dai coeficients gjeneralizâts di Fourier: aplicazion aes vibrazions assiâls. In ceste sezion o presentìn une selezion dai risultâts otignûts intune serie di aplicazions dal metodi dai coeficients gjeneralizâts di Fourier doprant un numar finît di autovalôrs che a partegnin a un singul spetri. Par resons di spazi, la discussion e je limitade a une famee particulâr di perturbazions di masse, in grât in ogni câs di descriveri situazions impuartantis te pratiche, tant che chês cun variazions di masse continuis o discontinuis, o cumbinazions des dôs. Par une analisi plui detaiade, si rimande a Dilen et al. (2019b).

3.4.1 Impostazions numerichis e champions di prove

La aplicazion pratiche dal metodi di ricostruzion descrit inte sezion 3.3.1 e domande il disvilup di un codiç numeric specific. Il nestri codiç si base suntun model a elements finîts de nanotrâf, cun apossimazion polinomiâl di tierç grât dal spostament assiâl in ogni element finît. A son stadis fatis provis preliminârs su la nanotrâf no perturbade par selezionâ une maie adeguate. La plui part des simulazions e je stade fate cun

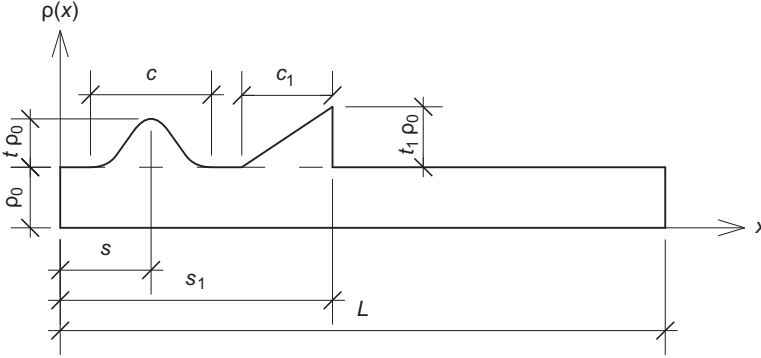


Figure 1: Densitât di masse par unitât di lungjece $\rho = \rho(x)$ di identificâ. Variazion di masse soreponude tant che in (3.53).

$N_e = 200$ elements finîts ecuidistants, che si son pandûts un bon compromès tra precision (erôr massim sui prins 15 autovalôrs, mancual dal 10^{-4} par cent) e cost computazionâl. Lis matricis di masse e rigjidadis locâls a son stadis valutadis in forme esate e lis jentradis de matrici $\mathbf{A}$ a son stadis determinadis cuntune regule di integrazion trapezoidâl. Dute la procedure, sedi pal probleme diret che par chel inviers, e je stade fate in ambient Scilab (version 5.5.2). Il timp di calcul necessari par une iterazion singule dal algoritmi di identificazion par $N_e = 200$ e $N = 15$ al è stât di $0.5 - 1.0$ s. Lis simulazions preliminârs a sugjerissin di sielzi $\gamma = 10^{-5}$ intal criteri di arest e un massim di 10 iterazions si è dimostrât sufficient par otignî la convergience inte plui part des simulazions.

Il nestri campion al è la nanotrâf cilindriche doprade in (Kong et al., 2009), cun rai r de sezion trasversâl circolâr ecuivalente pâr a $50 \mu m$ ($= 50 \cdot 10^{-6} m$) e lungjece $L = 40r$. I parametris di scjale de lungjece dal materiâl si supon che a sedin avuâi e $\ell_0 = \ell_1 = \ell_2 = \ell = 17.6 \mu m$; il modul di Young E al di 1.44 GPa; il coefficient di Poisson al è $\nu = 0.38$; e la densitât di masse volumetriche e je $\rho_{vol} = 1000 \text{ kg/m}^3$. I coefficients a , b , ρ_0 corispondents ai parametris parsore indicâts a cjapin sù, in maniere rispetive, il valôr $a = 11.310 N$, $b = 3.554 \cdot 10^{-9} Nm^2$, $\rho_0 = \rho_{vol} \cdot \pi r^2 = 7.854 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}$.

3.4.2 Cualchi risultât

O ripuartìn cualchi risultât rapresentatîf relatîf ae identificazion di doi profiî di masse zontade soreponûts, un regolâr e chel altri di forme triangolâr, cuntune discontinuitât di salt. Plui di precis, la densitât di masse di determinâ e à la espression

$$\rho(x) = \rho_0 + \rho_0 \max \left\{ t \cos^2 \left(\frac{\pi(x-s)}{c} \right) \chi_I, \frac{t_1}{c_1} (x - (s_1 - c_1)) \chi_{I_1} \right\}, \quad (3.53)$$

dulà che $I = [s - \frac{c}{2}, s + \frac{c}{2}]$, $I_1 = [s_1 - c_1, s_1] \subset [0, \frac{L}{2}]$. Lis cuantitâts c e c_1 a son, in maniere rispetive, lis lungjesis dai intervai I e I_1 , e $\rho_0 t > 0$, $\rho_0 t_1 > 0$ a son lis variazions di ampiece massime corrisponentis (Figure 1). I parametris c e c_1 a son stât ipotizâts compagns di $0.2L$ e la identificazion e je stade fate doprant $N_e = 200, 400$ elements finîts ecuidistants, in maniere rispetive par $N = 6, 9, 12, 15$ e $N = 20, 25$. Al va notât che, daûr i valôrs di s_1 e t_1 , il coefficient $\rho(x)$ in (3.53) al pues jessi continui o discontinui.

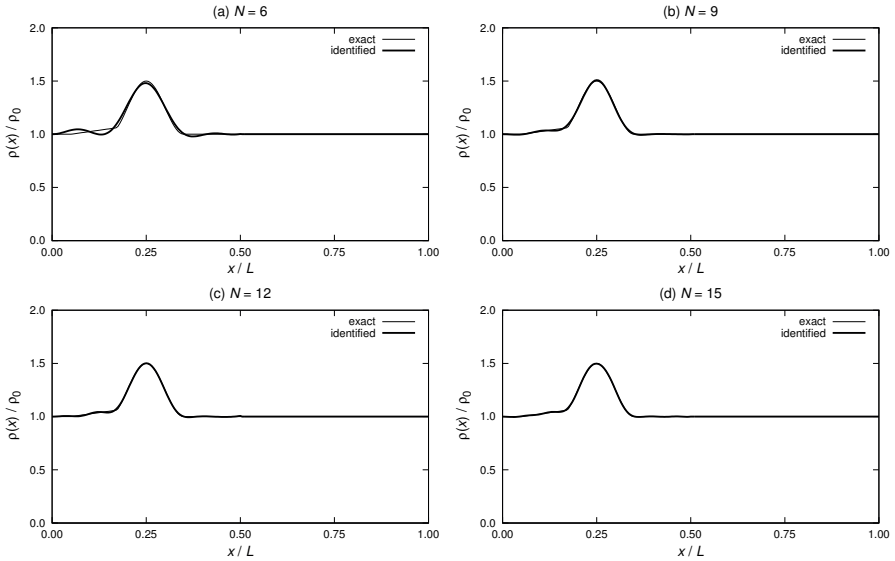


Figure 2: Ricostruzione des variazions di masse soreponude tant che in (3.53), cun $\frac{s}{L} = 0.25$, $t = 0.50$, $\frac{s_1}{L} = 0.25$, $t_1 = 0.10$, doprant lis primis $N = 6 - 15$ autofrecuencis.

La determinazion dal coeficient di masse continui e risulte une vore precise ancje cuant che inte identificazion a vegnin dopradis dome lis primis 9 – 12 autofrecuencis. Par un risultât tipic, si rimande ae Figure 2 .

In câs di coeficient discontinui, si verificchin ossilazions spuriis in prossimitât dal salt, cun amplece che e risulte proporziônâl ae intensitât dal salt. Di consequence, la identificazion de part regolâr dal coeficient di masse par valôrs pigui di t e pues diventâ imprecise. In chescj câs, al somee che a coventin almancul 15 – 20 frecuencis iniziâls par otignî une precision acetabile (che si viodi la Figure 3). Il metodi al mostre ancje une buine capacitât di identificâ variacions di masse cun supuarts diszontâts, in particolâr cuant che i valôrs di t_1 e t a son dongje.

3.5 Estension aes vibrazions flessionâls. In cheste seziôn o slargjìn la analisi dal probleme inviers ae definizion de masse zontade distribuide in nanotrâfs sometudis a *vibrazions di flession*. In particolâr, o calcolìn la situazion plui gjenerâl là che la variacion di masse e pues influençâ dute la lungjece de nanotrâf, no dome metât dal as, come che o vin fat inte seziôn di prime pes vibrazions assiâls. O viodarìn che pe identificazion de masse a puedin jessi doprâts (almancul) doi spetris parziâi, corrispondents a cundizions aes estremitâts diviersis (Dilena et al., 2020).

3.5.1 Formulazion dal probleme inviers

La vibrazion di flession libare infinitesimâl ae frecuence radiante $\sqrt{\lambda}$ de nanotrâf uniforme *no perturbade*, di lungjece L e in cundizions aes estremitâts supuartadis, e je guviernade dal probleme dai autovalôrs (Kong et al., 2009)

$$\begin{cases} Su^{IV} - Ku^{VI} = \lambda \rho_0 u, & x \in (0, L), \\ u(0) = 0, & -Su''(0) + Ku^{IV}(0) = 0, & u''(0) = 0, \\ u(L) = 0, & -Su''(L) + Ku^{IV}(L) = 0, & u''(L) = 0, \end{cases} \quad (3.54)$$

dulà che λ al è l'autovalôr e $u = u(x)$ la autofunzion asociade. Il coeficient $\rho_0 > 0$ al è la densitât di masse no perturbade par unitât di lungjece. I coeficients constitutîfs $S > 0$ e $K > 0$ a son stâts definîts in (2.89).

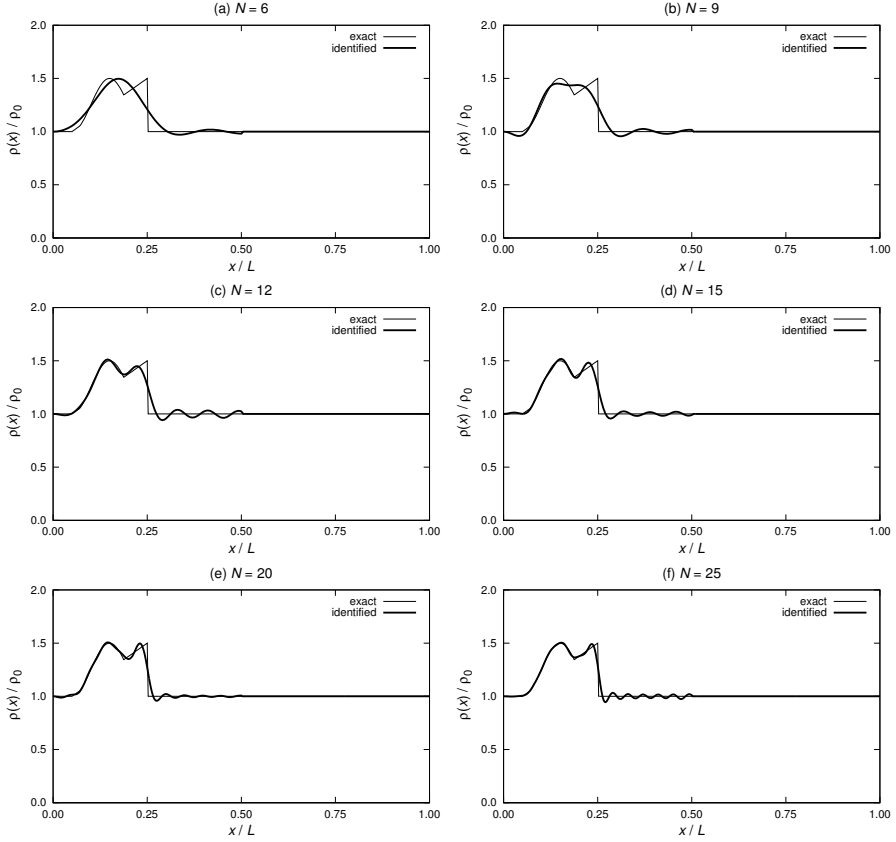


Figure 3: Ricostruzione des variacions di masse soreponudis tant che in (3.53), cun $\frac{s}{L} = 0.15$, $t = 0.50$, $\frac{s_1}{L} = 0.25$, $t_1 = 0.50$, doprant lis primis $N = 6-25$ autofrecuencis.

Lis cubiis di autovalôrs $\{\lambda_n^S, u_n^S(x)\}_{n=1}^\infty$ di (3.54) a son

$$\lambda_n^S = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^6 \left[\frac{1}{\rho_0} \left(K + \frac{S}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \right) \right], \quad u_n^S(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (3.55)$$

dulà che e je stade cjapade in considerazion la cundizion di normalizazion de masse, $n \geq 1$.

Se in (3.54) lis cundizions al contor in $x = L$ a vegin modificadis in

$$u'(L) = 0, \quad -Su'''(L) + Kv^V(L) = 0, \quad Ku'''(L) = 0, \quad (3.56)$$

alore si dîs che la nanotrâf e je in cundizions aes estremitâts *supuartade-scorevule*, vâl a dî che une des dôs estremitâts e je fissade a un supuart fis ($x = 0$), intant che chê altre e à un supuart scorevul ($x = L$). Lis corispondentis cubiis di autovalôrs no perturbadis $\{\lambda_n^{S\ell}, u_n^{S\ell}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a son

$$\begin{aligned}\lambda_n^{S\ell} &= \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^6 \left[\frac{1}{\rho_0} \left(K + \frac{S}{\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2} \right) \right], \\ u_n^{S\ell}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\rho_0 L}} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right),\end{aligned}\tag{3.57}$$

cun $\int_0^L \rho_0 (u_n^{S\ell}(x))^2 dx = 1$ par ogni $n \geq 1$.

Assumìn che la variazion de densitât di masse e sedi tant che in (3.26) e che $r_\epsilon(x)$ la variazion discognossude. Suponìn che $r_\epsilon(x)$ e sodisfi (3.27)-(3.29), ma no necessariementri (3.31), par esempli, il supuart di $r_\epsilon(x)$ cumò al è un sotinsiemi dal interval *intâr* $[0, L]$.

Segnìn cun $\{\lambda_n^S(\rho), u_n^S(x; \rho)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\lambda_n^{S\ell}(\rho), u_n^{S\ell}(x; \rho)\}_{n=1}^{\infty}$, in maniere rispetive, lis autocubiis des cundizions aes estremitâts supuartadis (S) e supuartade-scorevule ($S\ell$) cuant che ρ_0 al è sostituît di $\rho(x)$. O vuelìn costruî une aprossimazion di $\rho(x)$ o, in maniere ecuivalente, di $r_\epsilon(x)$, doprant une quantitat finide di dâts spetrâi che a partegnin al spetri supuartât e supuartât-scorevul, o sedi l'insiemi $\{\lambda_n^S(\rho)\}_{n=1}^N \cup \{\lambda_m^{S\ell}(\rho)\}_{m=1}^M$, dulà che N, M a son numars intîrs dâts.

3.5.2 Il metodi di ricostruzion

La ricostruzion de masse e je otignude tant che gjeneralizazion dal metodi presentât inte sezion 3.3.1, e si base su linearizacions iterativis dal probleme inviers intun intor de nanotrâf no perturbade. Chi, o lassìn in bande i details e si concentrìn sui passaçs principâi de analisi.

O scomencìn cu la soluzion dal probleme inviers linearizât in prosimitât de nanotrâf no perturbade, che e je il prin pas de procedure di identificazion iterative descritte te sezion 3.3.1 pe vibrazion assiâl. Il cambiament di prin ordin di un autovalôr de nanotrâf no perturbade al è dât di

$$\delta\lambda_n^S = \int_0^L r_\epsilon(x) \Phi_n^S(x) dx, \quad \delta\lambda_m^{S\ell} = \int_0^L r_\epsilon(x) \Phi_m^{S\ell}(x) dx \tag{3.58}$$

par cundizions aes estremitâts, rispeticivementri, supuartadis e supuartade-scorevule, dulà che $\Phi_n^S(x) = (u_n^S(x))^2$, $\Phi_m^{S\ell}(x) = (u_m^{S\ell}(x))^2$, $n = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, M$. Lis espressions (3.58) a puedin jessi determinadis lant daûr dai argoments doprâts parsore par otignî (3.39). Ecezion fate par une costante multiplicative no essenziâl, o vin

$$\left\{ \Phi_n^S(x), \Phi_m^{S\ell}(x) \right\}_{n,m=1}^{\infty} = \left\{ 1 - \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right\}_{k=1}^{\infty} \quad (3.59)$$

e cheste famee e je une base dal insiemi $L^2([0, L])$ des funzions di cuadrât integrabil definidis su dut l'interval $[0, L]$. Al è duncje resonevul cirî une aprossimazion finide di ordin $(N + M)$ di $r_\epsilon(x)$ su chest insiemi di funzions, o sedi

$$r_\epsilon(x) = \sum_{n=1}^N \beta_n^S \Phi_n^S(x) + \sum_{m=1}^M \beta_m^{S\ell} \Phi_m^{S\ell}(x), \quad (3.60)$$

dulà che $\{\beta_n^S\}_{n=1}^N$, $\{\beta_m^{S\ell}\}_{m=1}^M$ a fasin il rûl di coefficients gjeneralizâts di Fourier di $r_\epsilon(x)$. Chescj coefficients a puedin jessi determinâts metint la espression (3.60) in (3.58) e risolvint il sisteme lineâr corispondent $(N + M) \times (N + M)$ $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\delta\lambda}$, dulà che $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1^S, \dots, \beta_N^S, \beta_1^{S\ell}, \dots, \beta_M^{S\ell})$, $\boldsymbol{\delta\lambda} = (\delta\lambda_1^S, \dots, \delta\lambda_N^S, \delta\lambda_1^{S\ell}, \dots, \delta\lambda_M^{S\ell})$, e lis jentradis de matric $\mathbf{A}$ a son definidis come chês de matric $\mathbf{A}$ introdote te sezion 3.3.1. Doprant lis espressions esplicitis di $u_n^S(x)$, $u_n^{S\ell}(x)$ pe nanotrâf no perturbade, lis jentradis de matric $\mathbf{A}$ a son $A_{mn} = \frac{1}{\rho_0^2 L}$ par $m \neq n$ e $A_{nn} = \frac{3}{2\rho_0^2 L}$, $m, n = 1, \dots, M + N$. L'inviars di $\mathbf{A}$ al pues jessi determinât in forme sierade. Si che duncje, il vetôr $\boldsymbol{\beta}$ al à la espression esplicite

$$\begin{aligned} \beta_n^S &= 2\rho_0^2 L \left(\delta\lambda_n^S - \frac{2}{2M + 2N + 1} \left(\sum_{k=1}^N \delta\lambda_k^S + \sum_{j=1}^M \delta\lambda_j^{S\ell} \right) \right), \\ \beta_m^{S\ell} &= 2\rho_0^2 L \left(\delta\lambda_m^{S\ell} - \frac{2}{2M + 2N + 1} \left(\sum_{k=1}^N \delta\lambda_k^S + \sum_{j=1}^M \delta\lambda_j^{S\ell} \right) \right) \end{aligned}$$

$n = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, M$, e e ven determinade la variazion di masse di prin ordin. Di file, al è pussibil doprâ une procedure iterative analighe a chê mostrade inte sezion 3.3.1 par identificâ la variazion di masse su dut l'interval $[0, L]$. Il criteri di arest (3.51) al scuén jessi inzornât par includi un control ancje sul secont spetri.

3.5.3 Simulazions e risultâts

Il metodi di ricostruzion al è stât testât suntune serie slargjade di simulazions cu la variazion di masse soreponude definide in (3.53). Achî in rie, o discutî in curt i risultâts principâi par $N = M$.

Lis proprietâts dal materiâl dal campion a corispuindin a chês dal materiâl epossidic e a son stadis dopradis in (Lam et al., 2003), o sedi, modul di Young $E = 1.44$ GPa, coeficient di Poisson $\nu = 0.38$, densitât di masse volumetriche $\rho_{vol} = 1220$ kg/m³, e parametris di scjale dal materiâl $\ell_0 = \ell_1 = \ell_2 = \ell = 17.6$ μ m. Si supon che la sezion trasversâl e sedi retangolâr, cun altece $h = 50$ μ m, largjece $b = 2h$, aree $A = bh$, moment di inerzie $I = bh^3/12$, e lungjece $L = 20h$. I parametris parsore indicâts a puartin a chescj coefficients: $S = 4.36 \cdot 10^{-9}$ Nm², $K = 4.71 \cdot 10^{-19}$ Nm⁴, $\rho_0 = \rho_{vol} \cdot A = 6.1 \cdot 10^{-6}$ kg/m.

La identificazion de variazion continue di masse e da bogns risultâts e la precision e miore al cressi di N . La definizion dai coefficients discontinuis, tant che previodût, al puarte a diferencis analighis a chês cjetadis intal câs assiâl. Par brevitât, si concentrarî dome sui câs là che la variazion discontinue di masse in (3.53) e je supuartade su doi intervai diszontâts di $(0, L)$. Tal câs di variazions di masse L^∞ -piçulis (e, duncje, ancje di amplece di salt piçule), i risultâts a son precîs avonde par $N = 12 - 15$, gjavât un piçul interval dongje de discontinuitât, che si viodi la Figure 4. Cuant che la variazion di masse no je piçule e la amplece dal salt e je paragonabile al valôr massim dal tiermin regolâr de variazion di masse (o ancje plui grant), par N fin a 15 a comparissin ossilazions spuriis che si propaghin in dut l'interval, cuntune amplece che e decjât lontan dal salt. In chescj câs si oten une precision cressinte lontan dal salt e inressint N , par esempi N fin a 20–25. Infin, cundut il fat che la convergience de procedure di identificazion e vedi caratar locâl e e domandi di lavorâ intun intor piçul avonde de nanotrâf di riferiment, al va notât che il metodi al mostre un potenziâl inspietât intal tratâ variazions di masse no necessariementri piçulis; che si viodi la Figure 5.

3.5.4 Une validazion sperimentâl

I dâts sperimentâi sui cambiaments indots de autofrecuence dovûts ae masse zontade tes nanotrâfs no son tancj. O vin testât il nestri metodi sui risultâts sperimentâi ripuartâts in (Hanay et al., 2015). Si rimande a

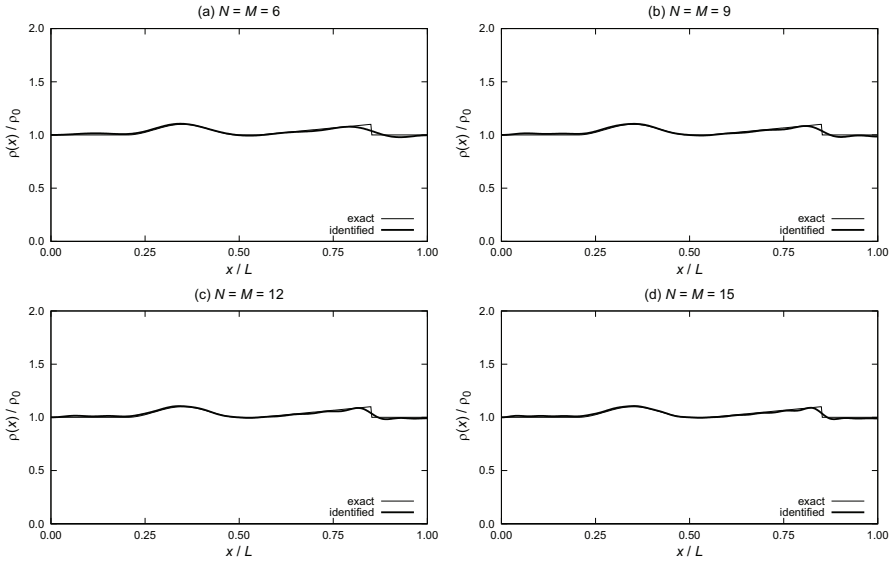


Figure 4: Ricostruzione des variazions di masse soreponudis discontinuis tant che in (3.53) in $[0, L]$. Parametris: $\frac{s}{L} = 0.35$, $\frac{c}{L} = 0.30$, $t = 0.10$, $\frac{s_1}{L} = 0.85$, $\frac{c_1}{L} = 0.30$, $t_1 = 0.10$, cum $N = M = 6$ (a), $N = M = 9$ (b), $N = M = 12$ (c), $N = M = 15$ (d).

chest articul par une descrizion complete dal esperiment. In curt, gotutis di licuit a son stadis deponudis suntune nanotrâf a sbalç (o ben, fissade dome a une estremitât) di Si monocristalin, di lungjece $L = 397 \mu m$ e sezion trasversâl retangolâr cun largjece $b = 29 \mu m$ e altece $h = 2 \mu m$. O vin un coefficient di Poisson $\nu = 0.2$; une densitât di masse volumetriche $\rho_{vol} = 2330 kgm^{-3}$; e $l_0 = l_1 = l_2$. Il modul di Young E dal materiâl e il parametri di scjale l_0 a son stâts stimâts cuntun confront cu lis primis cuatri frecuencis di risonance misuradis $\{f_n^{U,exp}\}_{n=1}^4$. O vin cjetât la soluzion otimâl uniche $E^{opt} = 175$ GPa, $l_0^{opt} = 0.032h$. La Tabele 1 e mostre che lis variazions di frequence indotis de masse zontade a son, in medie, plui grancj dai erôrs di modelizazion valutâts su la configurazion di riferiment. La esperienze maduride dai autôrs su altris problemis inviers ai autovalôrs basâts su dâts finîts (par esempi, la identificazion dai dams in trâfs classichis in scjale reâl, che si viodi Morassi (2007)) e sugjeris che cheste e je une cundizion essenziâl pal sucès de identificazion.

Lis seriis di gotutis a son stadis deponudis a cubiis, a partî de estre-

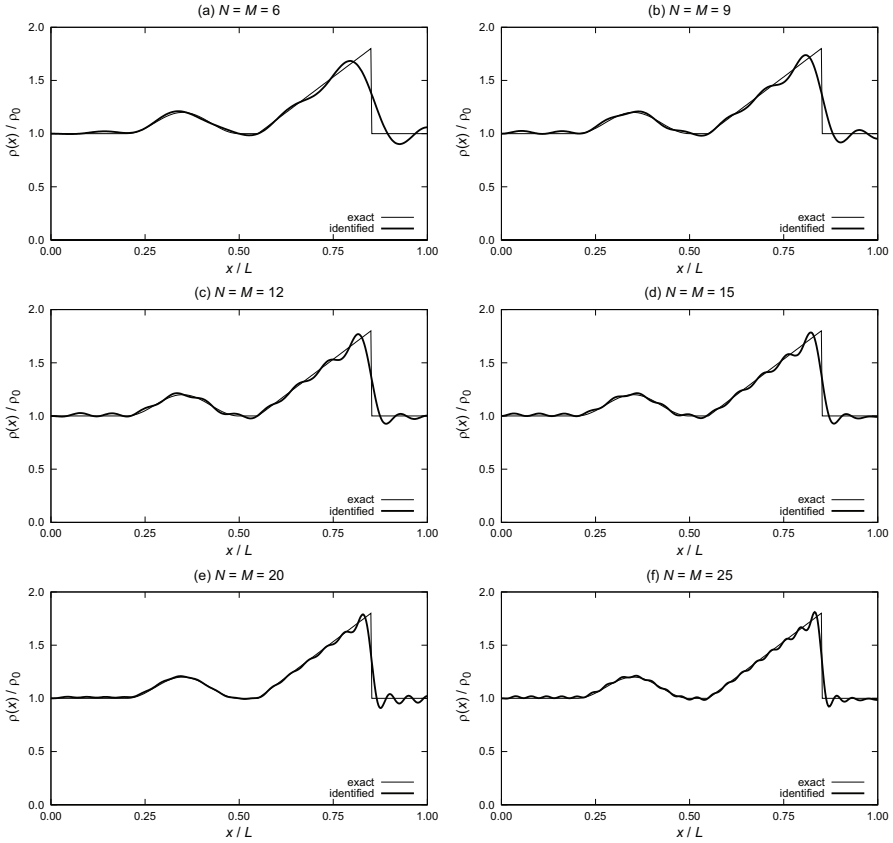


Figure 5: Ricostruzione des variazions di masse soreponudis discontinuis tant che in (3.53) in $[0, L]$. Parametris: $\frac{s}{L} = 0.35$, $\frac{c}{L} = 0.30$, $t = 0.20$, $\frac{s_1}{L} = 0.85$, $\frac{c_1}{L} = 0.30$, $t_1 = 0.80$, cun $N = M = 6, 9, 12, 15, 20, 25$ autofrecuencis.

mitât libere de trâf a sbalç, e a son stadis calcoladis lis sis configurazions mostradis inte Figure 6. Come che si pues viodi te Tabele 1, che e je stade dedusude de Tabele 1 in (Hanay et al., 2015), a son stadis misuradis lis autofrecuencis dai prins cuatri mûts di vibrâ in flession pes configurazions di riferiment (U) e perturbade (Pi), $i = 1, \dots, 6$.

Une serie selezionade di risultâts di identificazion e je mostrade te Figure 7. I coefficients di masse ricostruîts mostrâts intes Figuris 7(a,b) a son stâts determinâts assumint *a priori* che il supuart de variazion di

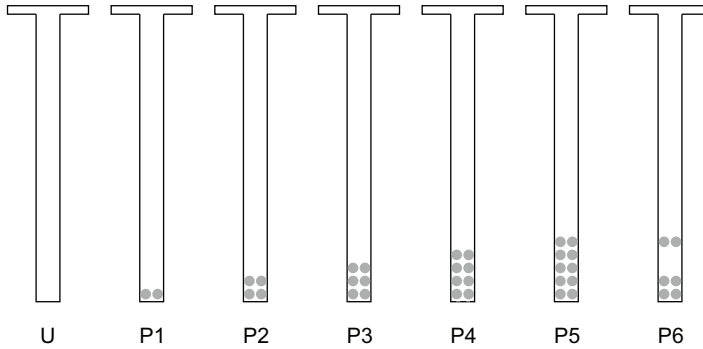


Figure 6: Campion sperimentâl: configuraziuns no perturbadis (U) e perturbadis di masse (P_i , $i = 1, \dots, 6$) otignudis cun deposizion di seriis di gotutis di licuit. Riproduzion elaborade di (Hanay et al., 2015).

Tabele 1: Valôrs sperimentâi des autofrecuencis de trâf a sbalç mostrade te Figure 6. U =configurazion no perturbade; valôrs assolûts in Hz e erôrs di modelizazion percentuâls $U\% = 100 \cdot (f_n^{U,th} - f_n^{U,exp})/f_n^{U,exp}$. P_i = i -esime configurazion perturbade, $i = 1, \dots, 6$; variaziuns percentuâls de autofrecuence indotis de masse $P_i\% = 100 \cdot (f_n^{U,exp} - f_n^{P_i,exp})/f_n^{U,exp}$. $f_n^{U,th}$ = n -esime autofrecuence teoriche no perturbade; $f_n^{U,exp}$ = n -esime autofrecuence sperimentâl no perturbade; $f_n^{P_i,exp}$ = n -esime autofrecuence sperimentâl de trâf a sbalç perturbade P_i . Dâts sperimentâi gjavâts di (Hanay et al., 2015).

n	No perturbade			Perturbade				
	U	U%	P1%	P2%	P3%	P4%	P5%	P6%
1	17883	0.31	0.59	1.14	1.53	2.18	2.67	1.36
2	112465	-0.04	0.49	0.77	0.87	0.94	0.94	0.74
3	315158	-0.12	0.41	0.53	0.54	0.58	0.75	0.60
4	617728	-0.15	0.33	0.36	0.38	0.67	1.07	0.60

masse discognossude e sedi de metât diestre de trâf a sbalç, par esempi il sot interval $(0.5L, L)$. La funzion di densitât ricostruide e mostre in maniere corete grandis inressitis positivis dentri dal ultin cuart de trâf a sbalç. Il massim de variazion di masse al cres pai câs di $P1$ a $P5$, come si spietavisi, e il supuart de variazion di masse positive si slargje ancje de estremitât libare bande l'interni. Al è interessant notâ che il

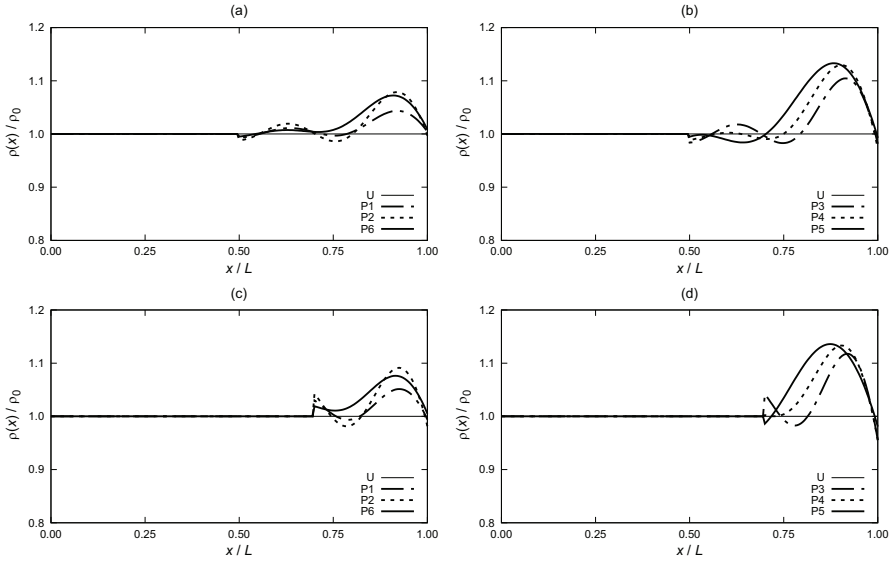


Figure 7: Ricostruzion de masse pe trâf a sbalç mostrade inte Figure 6 doprant lis primis cuatri autofrecuencis sperimentâls e par diversis sieltis dal interval di identificazion. Rie superiôr: $[0.5L, L]$; rie inferiôr: $[0.7L, L]$.

profil di masse ricostruît intal câs $P6$ al è simil a chel dal câs $P2$ in $[0.85L, L]$, e al mostre une altre incressite positive procedint bande il centri de trâf a sbalç. Par completece, la ricostruzion e je stade fate ridusint in maniere graduâl la dimension dal interval. Lis Figuris 7(c,d) a mostrin il câs $[0.7L, L]$, che in sostanza al conferme i risultâts otignûts lavorant su mieç interval. In conclusion, si note che la ricostruzion e je risultade utile cundut dal numar limitât di autofrecuencis sperimentâls disponibilis. I risultâts des simulazions numerichis disvilupadis intes sezions di prime a sugjerissin che la precision de ricostruzion e miorarès in maniere significative, ancje inte norme L^∞ , se al fos disponibil un numar ancje di pôc plui grant di primis autofrecuencis (sis-vot). Cun di plui, i risultâts incoragjants otignûts in cheste prove sperimentâl e somee che a sugjerissin che la teorie di prime, chê disvilupade pe identificazion in nanotrâfs supuartadis a lis dôs estremitâts, e podarès jessi gjeneralizade ancje a cundizions aes estremitâts diversis. Chest aspjet al à, dut câs, di jessi investigât plui a fonts dal pont di viste teoric.

4. Identificazion di inclusions in nanoplachis

4.1 Introduzion. Lis nanoplachis a son i components fundamentâi dai MEMS e dai NEMS e il lôr funzionament coret al è une carateristiche essenziâl par chescj dispositîfs. La domande di prestazions plui elevadis e dimensions limitadis (dimensions tipichis intor a $1 \div 10 \times 10^{-4}$ metris, o ançe mancûl) e pues puartâ a stâts di deformazion/solecitazion plui alts e cundizions operativis une vore impegnativis che a puedin cressi la probabilitât di vuascj strutturâi. Cun di plui, dilunc dal procès di produzion a puedin comparî difiets tant che crevaduris, vueits internis, mancjance di omogjeneitât tal materiâl e fenomens di abrasion, che a puedin evolvisi dilunc de vite des nanoplachis, puartant ae ativazion di vuascj mechanics dal dispositîf (Chen et al., 2017; Jalalahmadi et al., 2009; Yuan et al., 2020). Par chescj motîfs, tai ultins timps al è cressût l'interès pal disvilup di tecnicis diagnosticis par valutâ la presince di difiets intes nanoplachis, vierzint cussì la strade ae estension dai metodis fin cumò elaborâts pe valutazion di sistemis mechanics su largje scjale ançe aes dimensions nanometricis. Par esempi, in Alessandrini et al. (2024) al è stât cjapât in considerazion il probleme inviers di determinâ il coeficient di Winkler intune nanoplache poiade suntune fondazion elastice, e une stime globâl de stabilitât di Hölder dal coeficient dal sotfont e je stade dimostrade fasint une misurazion interne singule de deflection trasversâl de nanoplache indote di une cjame concentrade intun pont.

In cheste ultime part di cheste rassegna, o studiìn il probleme di determinâ, dentri di une nanoplache elastice isotrope in flession, la presince di un difiet modelât tant che une inclusion costituide di materiâl elastic divers. Sot ipotesis oportunis a priori su la inclusion discognossude, o furnìn stimis cuantitativis dal alt e dal bas de aree de inclusion tai tiermins dal lavôr disvilupât dai dâts al contor cuant che la inclusion e je e cuant che, invezit, no je (Morassi et al., 2023b).

Par semplificâ la esposizion, inte prossime sezion o introdusìn lis ideis principâls e i struments matematics intal contest plui simplic de condutivitât, là che la impostazion des stimis des dimensions e je stade disvilupade in origjin di Alessandrini e Rosset (1998), Alessandrini et al. (2000). Daspò, o passarìn a frontâ il probleme des stimis dimensionâls pes nanoplachis.

4.2 Un prototip: stimis di grandece inte condutivitat. In cheste seziun o anin daûr dal tratament presentât inte seziun introdutive di Alessandrini et al. (2003) (paragrafs 1.1-1.3).

Premetìn cualchi notazion essenziâl. Dât un insiemi viert e limitât $U \subset \mathbb{R}^n$ e un numar intîr m , $m \geq 1$, o indichìn cun $H^m(U)$ il solit spazi di Sobolev des funzions misurabilis di Lebesgue $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ cun derivade debile $D^\alpha f$ di cuadrât sumabil fin al ordin m , par esempi, $H^m(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_U |f|^2 + \sum_{|\alpha|=1}^m |D^\alpha f|^2 < +\infty\}$, dulà che $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$ numar intîr, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$. O indichìn cun $H^{-m}(U)$ il spazi duâl di $H^m(U)$.

4.2.1 Il probleme inviers

Cjapìn in considerazion un condutôr eletric cun condutivitat uniforme $\sigma \equiv 1$ che al ocupe un insiemi viert limitât $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cun frontiere di Lipschitz. Suponìn che une inclusion discognossude $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\Omega} \subset \subset \Omega$, cun condutivitat $\sigma \equiv 2$, e sedi contignude, in câs, in Ω . Dade une densitat di corint φ no identichementri nule sul contor $\partial\Omega$, cun $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ e $\int_{\partial\Omega} \varphi = 0$, il probleme diret di condutivitat al consist intal determinâ la tension $u = u(x)$, $u \in H^1(\Omega)$, soluzion (a mancun di une costante aditive) dal probleme di Neumann

$$\begin{cases} \operatorname{div}((1 + \chi_{\tilde{\Omega}})\nabla u) = 0, & \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot \nu = \varphi, & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

dulà che $\chi_{\tilde{\Omega}}$ e je la funzion carateristiche dal insiemi $\tilde{\Omega}$ e ν e denote la normâl unitarie esterne a $\partial\Omega$.

Un probleme inviers che si presente in tancj cjamps de sience aplicade e de tecnologjie al è chel che al ven clamât probleme di condutivitat invierse cuntune misurazione. Al consist intal determinâ $\tilde{\Omega}$ cognossint la densitat di corint φ che e agjìs sul contor $\partial\Omega$ e la corrisponente tension $u|_{\partial\Omega}$ misurade su $\partial\Omega$. Cundut de semplicitât de sô formulazion, ancje la cuistion de unicitât di chest probleme inviers e reste un probleme cence soluzion e impegnatîf pe inclusion gjenerâl; si rimande, tra altris contribûts, a Isakov (1998) par une rassegna. La unicitât e je garantide cuant che dutis lis misurazions al contor a puedin jessi fatiss, o ben cuant la mape complete di Neumann-Dirichlet $N_{\tilde{\Omega}} : \varphi \in H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow u|_{\partial\Omega} \in$

$H^{1/2}(\Omega)$ e je cognossude e a vegnin formuladis ipotesis adeguadis su la topologjie e su la regolaritât de inclusion $\tilde{\Omega}$. Chest al è un risultât celebri di Isakov (1988). A ogni mût, Di Cristo e Rondi (2003) a àn dimostrât che, anje cuant che e je disponibile la mape complete di Neumann-Dirichlet, il probleme inviers al è seriementri malponût e la stabilitât de mape $N_{\tilde{\Omega}} \rightarrow \tilde{\Omega}$ no pues jessi miôr che logaritmiche. Di consequence, in pratiche, al è impossibil aplicâ technichis di ricostruzion de inclusion discognossude di dâts di contor cun erôrs.

Tignint cont di chescj aspiets, al è resonevul limitâ l'obietîf dal probleme inviers dome cuntune misure di contor e provâ di stimâ cierts parametris che a esprimin la dimension, par esempi la aree o il volum, de inclusion, trascurant la sô posizion e forme precisis. L'obietîf de impostazion basade su lis stimis di grandece e je la definizion di stimis cuantitativis dal alt e dal bas de misure di Lebesgue $|\tilde{\Omega}|$ de inclusion in tiermins di misurazions al contor.

4.2.2 La idee principâl

O descrivìn achì la idee principâl dal metodi. Come te plui part des technichis diagnosticchis, al è ben disponi di une configurazion di riferiment dal probleme pal confront. Indichìn cun $u_0 \in H^1(\Omega)$ il potenziâl corispondent ae stesse corint di contor φ cuant che la inclusion e je assente:

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0, & \text{in } \Omega, \\ \nabla u_0 \cdot \nu = \varphi, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Segnìn cun W , W_0 lis potencis necessariis par mantignî la densitât di corint dade φ su $\partial\Omega$ cuant che $\tilde{\Omega}$ e je, rispetivementri, presinte o assente:

$$W = \int_{\partial\Omega} u\varphi, \quad W_0 = \int_{\partial\Omega} u_0\varphi. \quad (4.3)$$

La potence di riferiment W_0 e pues jessi considerade come cuantitât dade, stant che o podìn meti che la soluzion di (4.2) e sedi cognossude.

La ipotesi di fonde e je che la difference di potence $|W - W_0|$ e varès di jessi sensibile ae inclusion $\tilde{\Omega}$. Par verificâlu, o podìn doprâ un resonament semplic basât su la formulazion variazionâl dai problemis (4.1),

(4.2). La funzion u_0 e je la soluzion al probleme minim

$$F_0(u_0) = \min_{v \in H^1(\Omega)} F_0(v), \quad F_0(v) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v - 2 \int_{\partial\Omega} v \varphi$$

e e sodisfe

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} \varphi v, \quad \text{par ogni } v \in H^1(\Omega).$$

Istessementri, la funzion u e je cussì che

$$F_{\tilde{\Omega}}(u) = \min_{v \in H^1(\Omega)} F_{\tilde{\Omega}}(v), \quad F_{\tilde{\Omega}}(v) = \int_{\Omega} (1 + \chi_{\tilde{\Omega}}) \nabla v \cdot \nabla v - 2 \int_{\partial\Omega} v \varphi$$

e

$$\int_{\Omega} (1 + \chi_{\tilde{\Omega}}) \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} \varphi v, \quad \text{par ogni } v \in H^1(\Omega).$$

Si che duncje, o vin

$$-W_0 = F_0(u_0) \leq F_0(u) = F_{\tilde{\Omega}}(u) - \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u|^2 = -W - \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u|^2,$$

vâl a dî

$$-W_0 \leq -W - \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u|^2.$$

Doprant une procedure simile, cheste volte partint di u , o cjatìn

$$-W \leq -W_0 + \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u_0|^2$$

e des ultimis dôs disavualancis o otignìn

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u|^2 \leq W_0 - W \leq \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u_0|^2. \quad (4.4)$$

Chest al dimostre che se $|\tilde{\Omega}| > 0$ e $\varphi \not\equiv 0$, alore $W_0 - W > 0$, o sedi che la difference di potence $W_0 - W$ e je in efets sensibile a $\tilde{\Omega}$. Di fat, se nol fos cussì, o varessin $\nabla u = 0$ in $\tilde{\Omega}$ e, pe formulazion debile,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} (1 + \chi_{\tilde{\Omega}}) \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} \varphi v, \quad \text{par ogni } v \in H^1(\Omega),$$

che al impliche che u e je une soluzion di (4.2). Di consequence, $u = u_0 + \text{costante}$. e $\nabla u_0 = 0$ in $\tilde{\Omega}$. Stant che $|\tilde{\Omega}| > 0$, chest al impliche, pe proprietât di continuazion uniche des funzions armonichis, che $\nabla u_0 = 0$ in Ω , chel che al pues jessi dome se $\varphi \equiv 0$, une contradizion.

Al è pussibil doprâ il limit superiôr in (4.4) par otignî une stime cuantitative dal bas a $|\tilde{\Omega}|$. Se o suponìn a priori

$$\text{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega) \geq d_0 > 0, \quad (4.5)$$

alore, pes stimis di regolaritât interne,

$$\sup_{\tilde{\Omega}} |\nabla u_0|^2 \leq C_1^+ W_0 \quad (4.6)$$

e, in ultin,

$$|\tilde{\Omega}| \geq C_1^+ \frac{W_0 - W}{W_0}. \quad (4.7)$$

La definizion di une stime superiôr par $|\tilde{\Omega}|$ e je mancun semplice. Un prin ostacul al è rapresentât de presince de soluzion perturbade (4.4), che e dipent ancje de inclusion discognossude $\tilde{\Omega}$. Cheste dificoltât e pues jessi superade doprant un resonament inzeznôs di Kang et al. (1997) che al disfrute la strutture quadratiche dai integrâi di energjie e al permet di sostituî u cun u_0 cuntun fatôr $1/2$:

$$\frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u_0|^2 \leq W_0 - W \leq \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla u_0|^2. \quad (4.8)$$

Po dopo, la stime dal bas di $|\nabla u_0|^2$ e je difficile, se no impossibile, stant che ∇u_0 e pues diventâ nule dentri di Ω . Un mût naturâl par evitâ chest probleme al è sielzi la densitât di corint φ al contor in mût che il gradient nol sparissi, par esempi $\varphi = e \cdot \nu$ su $\partial\Omega$, che al impliche $\nabla u_0 \equiv e$, dulà che e al è un vetôr unitari in $\mathbb{R}^n$. In ogni câs, cheste siele e podarès no jessi aplicabile cun facilitât inte pratiche. Cun di plui, la presince di une condutivitât no dal dut uniforme dal cuarp e domande une impostazion plui gjenerâl dal probleme. Par chescj motifs, un dai temis principâi ae base de impostazion des stimis dimensionâls e je la stime cuantitative dal tas di anulament di $|\nabla u_0|^2$ intai ponts internis di Ω . Chest aspjet al è delineât inte sezion sucessive e al sarà aprofondît pal probleme des nanoplachis inte sezion 4.6.

4.2.3 Continuazion uniche

I imprescj principâi par controlâ il tas di anulament di $|\nabla u_0|^2$ intai ponts internis di Ω a son stimis cuantitativis adatis de continuazion uniche sot forme de *disavualance des trê sferis* (Landis, 1963) e de *disavualance di dopleament* (Garofalo e Lin, 1986) pes soluzions dal probleme no perturbât (4.2). Introdusînlis in tiermins locâi.

Par ogni $\bar{r} > 0$ segnìn $\Omega_{\bar{r}} = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \bar{r}\}$.

E sedi $u_0 \in H^1(\Omega)$ une soluzion di $\Delta u_0 = 0$ in Ω . La disavualance des trê sferis e compuarte che par ogni $r_1, r_2, r_3, \bar{r}$, $0 < r_1 < r_2 < r_3 \leq \bar{r}$, e par ogni $x_0 \in \Omega_{\bar{r}}$

$$\int_{B_{r_2}(x_0)} |\nabla u_0|^2 \leq C \left(\int_{B_{r_1}(x_0)} |\nabla u_0|^2 \right)^\delta \left(\int_{B_{r_3}(x_0)} |\nabla u_0|^2 \right)^{1-\delta}, \quad (4.9)$$

dulà che $C > 0$ e δ , $0 < \delta < 1$, a dipendin dome di $\frac{r_1}{r_3}$ e $\frac{r_2}{r_3}$. Par une funzion u_0 cjapade tant che parsore, la disavualance di dopleament e aferme che par ogni r , $0 < 4r \leq \bar{r}$ e par ogni $x_0 \in \Omega_{\bar{r}}$

$$\int_{B_{2r}(x_0)} |\nabla u_0|^2 \leq C \int_{B_r(x_0)} |\nabla u_0|^2, \quad (4.10)$$

dulà che $C > 0$ e je une costante adeguate che e dipent di u_0 ma no di r . Cumbinant chestis proprietâts di continuazion uniche locâl cuntune altre formulazion de proprietât di continuazion uniche clamade *propagazion Lipschitz de piçulece*, al è pussibil dimostrâ che se i dàts al contor φ no ossilin masse, alore il tas di anulament di $|\nabla u_0|^2$ dentri di Ω nol pues jessi elevât. Plui di precîs, si oten che se il cuozient clamât *frecuence* di φ

$$F[\varphi] = \frac{\|\varphi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}}{\|\varphi\|_{H^{-1}(\partial\Omega)}}, \quad (4.11)$$

al è limitât a priori, alore par ogni sotinsiemi compat K di Ω al esist $p > 1$ cussì che $|\nabla u_0|_{\widetilde{\Omega}}^{-\frac{2}{p-1}}$ si pues integrâ su K . Si che duncje, si oten un limit superiôr su $|\widetilde{\Omega}|$ tant che

$$|\widetilde{\Omega}| \leq C_2^+ \left(\frac{W_0 - W}{W_0} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.12)$$

dulà che p al dipent de frecuence $F[\varphi]$.

O specifichèn in maniere esplicite che lis stimis che o vin viodût par-sore si aplichin a insiemis $\tilde{\Omega}$ misurabii in maniere arbitrarie cence restrizions topologjichis su la forme e nancje cundizions di regolaritât sul contor. La uniche ipotesi e je la (4.5).

Dopo cheste part introduttive, te prossime seziion o cjaparìn in considerazion il probleme inviers des stimis di grandece par une nanoplache.

4.3 Il probleme diret di Neumann par une nanoplache. Considerìn une nanoplache $\Omega \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$ cun plan median Ω rapresentât di un domini limitât di $\mathbb{R}^2$ e che e à altece costante t , $t << \text{diam}(\Omega)$. O assumìn che il contor $\partial\Omega$ di Ω al sedi di classe $C^{2,1}$ cun costantis r_0 , M_0 e che

$$|\Omega| \leq M_1 r_0^2, \quad (4.13)$$

dulà che M_1 e je une costante positive. O considerìn positîf l'orientament dal contor $\partial\Omega$ indot de normâl unitarie esterne $\mathbf{n}$ intal sens seguitîf. Par ogni pont $P \in \partial\Omega$, al sedi $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2) = \boldsymbol{\tau}(P)$ il vetôr tangjente unitari al contor in P otignût tant che $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}$.

Adatant i arguments presentâts inte seziion 2.4, il probleme di ecuilibri static par une nanoplache di Kirchhoff-Love cjariade al contor e cence fuarcis di volum al è descrit di chest probleme al contor di Neumann (Morassi et al., 2023a, 2024):

$$(M_{\alpha\beta} + \overline{M}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}^h)_{,\alpha\beta} = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} (M_{\alpha\beta} + \overline{M}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}^h)_{,\alpha} n_\beta + ((M_{\alpha\beta} + \overline{M}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}^h) n_\alpha \tau_\beta)_{,s} + (\overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h \tau_\alpha \tau_\beta n_\gamma)_{,ss} - \\ - (\overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h n_\gamma (\tau_{\alpha,s} \tau_\beta - n_{\alpha,s} n_\beta))_{,s} = -\widehat{V}, \quad \text{su } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} (M_{\alpha\beta} + \overline{M}_{\alpha\beta\gamma,\gamma}^h) n_\alpha n_\beta + (\overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h n_\gamma (\tau_\alpha n_\beta + \tau_\beta n_\alpha))_{,s} - \\ - \overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h n_\gamma (n_{\alpha,s} \tau_\beta) = \widehat{M}_n, \quad \text{su } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h n_\alpha n_\beta n_\gamma = -\widehat{M}_n^h, \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (4.17)$$

Si osserve che la procedure doprade par otignî la formulazion fuarte dal probleme di ecuilibri de formulazion debile (2.51) e je une formulazion standard, ma e domande une cierte cautele par tignî cont de variaziion de base locâl $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau})$ in presince di contors arcâts, un aspjet trascurât dispès in leterature (Morassi et al., 2023a, 2024). Dopo la integrazion

par parts, il pont principâl al consist intal esprimi lis derivadis secundis de funzion di prove $w_{,\alpha\beta}$ su $\partial\Omega$ in tiermins des derivadis normâls e de lungjece dal arc di w su $\partial\Omega$. Chest al è sclârît in chest leme.

Leme 4.1. *Al sedi Ω un domini limitât in $\mathbb{R}^2$ di classe C^2 e al sedi $w \in H^3(\Omega)$. Chestis formulis di cambi di variabilis a valin su $\partial\Omega$:*

$$\begin{aligned} w_{,\alpha\beta} = & w_{,ss} \tau_\alpha \tau_\beta + w_{,nn} n_\alpha n_\beta + w_{,sn} (\tau_\alpha n_\beta + \tau_\beta n_\alpha) + \\ & + w_{,s} (\tau_\beta \tau_{\alpha,s} - n_\beta n_{\alpha,s}) + w_{,n} \tau_\beta n_{\alpha,s}, \quad \text{c.d. su } \partial\Omega. \end{aligned}$$

O domandìn chestis cundizions di regolaritât sui dâts di contor $\widehat{V}$ (fuarce di tai), $\widehat{M}_n$ (moment fletint) e $\widehat{M}_n^h$ (moment fletint di ordin superiôr) che a comparissin intes ecuazions di ecuilibri al contor (4.15)–(4.17):

$$\widehat{V} \in H^{-5/2}(\partial\Omega), \quad \widehat{M}_n \in H^{-3/2}(\partial\Omega), \quad \widehat{M}_n^h \in H^{-1/2}(\partial\Omega). \quad (4.18)$$

Cun di plui, o assumìn lis cundizions di compatibilitât

$$\int_{\partial\Omega} \widehat{V} = 0, \quad \int_{\partial\Omega} \widehat{V} x_1 + \widehat{M}_n n_1 = 0, \quad \int_{\partial\Omega} \widehat{V} x_2 + \widehat{M}_n n_2 = 0. \quad (4.19)$$

Par comoditât dal letôr, o riclamin che lis funzions $M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}(u)$, $\overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h = \overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h(u)$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$, in (4.14)–(4.17) a son, rispetivementri, lis componentis Cartesianis dal tensôr $M = (M_{\alpha\beta})$ e dal tensôr di ordin superiôr $\overline{M}^h = (\overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h)$, che a corispuindin al spostament trasversâl $u(x_1, x_2)$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dal pont $(x_1, x_2) = x$ che al fâs part dal plan median de nanoplache. Par semplificâ la presentazion, la dipendence di chestis cuantitâts di u no je segnade in maniere esplicite in (4.14)–(4.17) e in chel che al seguîs.

Indichìn cun $\widehat{\mathbb{M}}^k$ il sot spazi dal spazi di Banach $\mathbb{M}^k$ dai tensôrs di k -esim ordin, $k = 2, 3$, che a àn components invariants a pet di dutis lis permutazions dai indiçs (ven a stâ tensôrs simetrics dal dut). Il spazi dai operadôrs lineârs limitâts tra i spazis di Banach X e Y al è $\mathcal{L}(X, Y)$.

O assumìn che lis funzions $M_{\alpha\beta}$ a puedin jessi esprimudis tant che

$$M_{\alpha\beta} = -(P_{\alpha\beta\gamma\delta} + P_{\alpha\beta\gamma\delta}^h) u_{,\gamma\delta} \quad (M = -(\mathbb{P} + \mathbb{P}^h) D^2 u), \quad (4.20)$$

dulà che i tensôrs di cuart ordin $\mathbb{P} = \mathbb{P}(x) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^2, \widehat{\mathbb{M}}^2))$, $\mathbb{P}^h = \mathbb{P}^h(x) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^2, \widehat{\mathbb{M}}^2))$ a sodisfin lis cundizions di simetrie

$$\mathbb{P}A \cdot B = \mathbb{P}B \cdot A, \quad \text{c.d. in } \Omega, \quad (4.21)$$

$$\mathbb{P}^h A \cdot B = \mathbb{P}^h B \cdot A, \quad \text{c.d. in } \Omega, \quad (4.22)$$

par ogni $A, B \in \widehat{\mathbb{M}}^2$, e la cundizion di convessità forte

$$(\mathbb{P} + \mathbb{P}^h) A \cdot A \geq t^3 \xi_{\mathbb{P}} |A|^2, \quad \text{c.d. in } \Omega, \quad (4.23)$$

par ogni $A \in \widehat{\mathbb{M}}^2$, dula che $\xi_{\mathbb{P}}$ e je une costante positive.

Lis funzioms $\overline{M}_{ijk}^h$ ($i, j, k = 1, 2$) a puedin jessi esprimudis tant che

$$\overline{M}_{ijk}^h = Q_{ijklmn} u_{,lmn} \quad (\overline{M}^h = \mathbb{Q} D^3 u), \quad (4.24)$$

dula che Q_{ijklmn} a son lis componentis Cartesianis dal tensôr di sest ordin $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(x) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^3, \widehat{\mathbb{M}}^3))$, e $\mathbb{Q}$ al è assumût sodisfâ lis cundizioms di simetrie

$$\mathbb{Q} A \cdot B = \mathbb{Q} B \cdot A, \quad \text{c.d. in } \Omega, \quad (4.25)$$

par ogni $A, B \in \widehat{\mathbb{M}}^3$, e la cundizion di convessità forte

$$\mathbb{Q} A \cdot A \geq t^5 \xi_{\mathbb{Q}} |A|^2, \quad \text{c.d. in } \Omega, \quad (4.26)$$

par ogni $A \in \widehat{\mathbb{M}}^3$, dula che $\xi_{\mathbb{Q}}$ e je une costante positive.

La formulazion debile dal probleme di Neumann (4.14)–(4.17), cun dâts di contor che a sodisfin (4.18) e (4.19), e consist intal determinâ une funzion $u \in H^3(\Omega)$ (soluzion debile) cussì che

$$a(u, w) = L(w), \quad \text{par ogni } w \in H^3(\Omega), \quad (4.27)$$

dula che

$$\begin{aligned} a(u, w) &= \int_{\Omega} -M_{\alpha\beta}(u) w_{,\alpha\beta} + \overline{M}_{\alpha\beta\gamma}^h(u) w_{,\alpha\beta\gamma} = \\ &= \int_{\Omega} (\mathbb{P} + \mathbb{P}^h) D^2 u \cdot D^2 w + \mathbb{Q} D^3 u \cdot D^3 w, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$L(w) = - \int_{\partial\Omega} \widehat{V} w + \widehat{M}_n w_{,n} + \widehat{M}_n^h w_{,nn}. \quad (4.29)$$

Par identificâ une soluzion univoche, o assumìn chestis cundizioms di normalizazion

$$\int_{\Omega} u = 0, \quad \int_{\Omega} u_{,\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.30)$$

O sin cumò in cundizion di afermâ la esistence, la unicitât e i risultâts di regolaritâts buinis pe analisi. I detais des dimostrazioms a son disponibii in Morassi et al. (2024).

Teoreme 4.2 (Esistence, unicitât e regularitât H^3). *Al sedi Ω un domini limitât in $\mathbb{R}^2$ cun frontiere $\partial\Omega$ di classe $C^{2,1}$ cun costantis r_0, M_0 . Assumìn che i tensôrs $\mathbb{P}, \mathbb{P}^h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^2, \widehat{\mathbb{M}}^2))$ e $\mathbb{Q} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^3, \widehat{\mathbb{M}}^3))$ a sodisfin, rispetivementri, lis cundizions di simetrie (4.21), (4.22), (4.25) e lis cundizions di convessitât fuarte (4.23), (4.26). A sedin i dâts $\widehat{V}, \widehat{M}_n, \widehat{M}_n^h$ tant che in (4.18) e che a sodisfin lis cundizions di compatibilitât (4.19).*

Il probleme di Neumann (4.14)–(4.17) al amet une soluzion debile uniche $u \in H^3(\Omega)$ che e sodisfe (4.30) e, cun di plui,

$$\|u\|_{H^3(\Omega)} \leq C \left(\|\widehat{V}\|_{H^{-5/2}(\partial\Omega)} + r_0^{-1} \|\widehat{M}_n\|_{H^{-3/2}(\partial\Omega)} + r_0^{-2} \|\widehat{M}_n^h\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \right) \quad (4.31)$$

dulà che la costante $C > 0$ e dipent dome di $\frac{t}{r_0}, M_0, M_1, \xi_{\mathbb{P}}, \xi_{\mathbb{Q}}$.

O concludin cheste sezion cuntun risultât globâl e un risultât miorât di regularitât interne.

Teoreme 4.3 (Regularitât globâl H^4). *Al sedi Ω un domini limitât in $\mathbb{R}^2$ cun contor $\partial\Omega$ di classe $C^{3,1}$ cun costantis r_0, M_0 , e che al sodisfe (4.13). Assumìn che i tensôrs $\mathbb{P}, \mathbb{P}^h \in C^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^2, \widehat{\mathbb{M}}^2))$ e $\mathbb{Q} \in C^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^3, \widehat{\mathbb{M}}^3))$ a sodisfin, rispetivementri, lis cundizions di simetrie (4.21), (4.22), (4.25) e lis cundizions di convessitât fuarte (4.23), (4.26). E sedi $u \in H^3(\Omega)$ la soluzion debile dal probleme di Neumann (4.14)–(4.17) che e sodisfe (4.30), dulà che $\widehat{V} \in H^{-3/2}(\partial\Omega)$, $\widehat{M}_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, $\widehat{M}_n^h \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ a son tâls che lis cundizions di compatibilitât (4.19) a son sodisfatis.*

O vin duncje $u \in H^4(\Omega)$ e

$$\|u\|_{H^4(\Omega)} \leq C \left(\|\widehat{V}\|_{H^{-3/2}(\partial\Omega)} + r_0^{-1} \|\widehat{M}_n\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} + r_0^{-2} \|\widehat{M}_n^h\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right), \quad (4.32)$$

dulà che la costante $C > 0$ e dipent dome di $\frac{t}{r_0}, M_0, M_1, \xi_{\mathbb{P}}, \xi_{\mathbb{Q}}, \|\mathbb{P}\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}, \|\mathbb{P}^h\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}, \|\mathbb{Q}\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}$.

Teoreme 4.4 (Regularitât interne miorade). *E sedi B_σ une sfere vierte $\mathbb{R}^2$ centrade inte origjin e cun rai σ . Al sedi $u \in H^3(B_\sigma)$ cussì che*

$$a(u, \varphi) = 0 \quad \text{par ogni } \varphi \in H_0^3(B_\sigma), \quad (4.33)$$

cun

$$a(u, \varphi) = \int_{B_\sigma} (\mathbb{P} + \mathbb{P}^h) D^2 u \cdot D^2 \varphi + \mathbb{Q} D^3 u \cdot D^3 \varphi, \quad (4.34)$$

dulà che i tensôrs $\mathbb{P}, \mathbb{P}^h \in C^{1,1}(\overline{B_\sigma}, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^2, \widehat{\mathbb{M}}^2))$, $\mathbb{Q} \in C^{2,1}(\overline{B_\sigma}, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^3, \widehat{\mathbb{M}}^3))$ a sodisfin, rispetivementri, lis cundizions di simetrie (4.21), (4.22), (4.25) e lis cundizions di convessitàt fuarte (4.23), (4.26).

Alore $u \in H^6(B_{\frac{\sigma}{8}})$ e o vin

$$\|u\|_{H^6(B_{\frac{\sigma}{8}})} \leq C \|u\|_{H^3(B_\sigma)}, \quad (4.35)$$

dulà che $C > 0$ al dipent dome di t , $\xi_{\mathbb{P}}$, $\xi_{\mathbb{Q}}$, $\|\mathbb{P}\|_{C^{1,1}(\overline{B_\sigma})}$, $\|\mathbb{P}^h\|_{C^{1,1}(\overline{B_\sigma})}$, $\|\mathbb{Q}\|_{C^{2,1}(\overline{B_\sigma})}$.

4.4 Stimis di grandece par nanoplachis. Par simplificâ la presentazion dai risultâts, o calcolarin dome che il câs di inclusions elasticis costituidis di materiâl plui dâr rispjet al materiâl che i sta ator. Il câs di inclusions plui fofis al pues jessi analizât in mût simil e nol introdûs elements gnûfs sostanziâi (Morassi et al., 2023b).

4.4.1 Il probleme inviers

Suponìn che al sedi pussibil che une inclusion $\widetilde{\Omega} \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$ e sedi presinte intune nanoplache $\Omega \times (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$, dulà che $\widetilde{\Omega}$ al è un sotinsiemi misurabil, pussibilmentri disconetût, di Ω .

O cjamin in considerazion i tensôrs di elasticitàt $\mathbb{P}, \widetilde{\mathbb{P}}, \mathbb{P}^h, \widetilde{\mathbb{P}}^h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^2, \widehat{\mathbb{M}}^2))$ e $\mathbb{Q}, \widetilde{\mathbb{Q}} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^3, \widehat{\mathbb{M}}^3))$, che a sodisfin, rispetivementri, lis cundizions di simetrie (4.21), (4.22) e (4.25).

O introdusìn altris ipotesi a priori sui tensôrs di elasticitàt. Prin di dut, metìn che il materiâl de nanoplache di riferiment (che al cengle la inclusion) al sedi isotrop, o sedi che lis componentis Cartesianis di $\mathbb{P}, \mathbb{P}^h, \mathbb{Q}$ a sedin dadis di (che si viodi la (2.4))

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = B((1 - \nu)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}), \quad (4.36)$$

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta}^h = (2a_2 + 5a_1)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + (-a_1 - a_2 + a_0)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}, \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{ijklmn} = & \frac{1}{3}(b_0 - 3b_1)\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + \frac{1}{6}(b_0 - 3b_1)\delta_{ik}(\delta_{jl}\delta_{mn} + \delta_{jm}\delta_{ln}) + \\
 & + \frac{1}{6}(b_0 - 3b_1)\delta_{jk}(\delta_{il}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{ln}) + Q_8\delta_{kn}(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}) + \\
 & + Q_9(\delta_{jn}(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}) + \delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl})),
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

dulà che $2(Q_8 + 2Q_9) = 5b_1$.

Daûr des ipotesis a priori formuladis parsore, o savìn che la rigjidditât ae flession (par unitât di lungjece) $B = B(x)$ e je dade de funzion

$$B(x) = \frac{t^3 E(x)}{12(1 - \nu^2(x))}, \quad \text{c.d. in } \Omega, \tag{4.39}$$

dulà che il modul di Young E e il coeficient di Poisson ν dal materiâl a puedin jessi esprimûts in tiermins dai moduli di Lamé μ e λ come

$$E(x) = \frac{\mu(x)(2\mu(x) + 3\lambda(x))}{\mu(x) + \lambda(x)}, \quad \nu(x) = \frac{\lambda(x)}{2(\mu(x) + \lambda(x))}. \tag{4.40}$$

I coeficients $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, a son dâts di

$$a_0(x) = 2\mu(x)tl_0^2, \quad a_1(x) = \frac{2}{15}\mu(x)tl_1^2, \quad a_2(x) = \mu(x)tl_2^2 \quad \text{c.d. in } \Omega, \tag{4.41}$$

dulà che i parametris di scjale dal materiâl l_i a son assumûts come costantis positivis (Morassi et al., 2023a). O indichìn cun

$$l = \min\{l_0, l_1, l_2\}. \tag{4.42}$$

I coeficients $b_i(x)$, $i = 0, 1$, a son dâts di

$$b_0(x) = 2\mu(x)\frac{t^3}{12}l_0^2, \quad b_1(x) = \frac{2}{5}\mu(x)\frac{t^3}{12}l_1^2 \quad \text{c.d. in } \Omega. \tag{4.43}$$

In secont lûc, o assumìn che μ a λ a sodisfin lis cundizions di elicitât

$$\mu(x) \geq \alpha_0 > 0, \quad 2\mu(x) + 3\lambda(x) \geq \gamma_0 > 0 \quad \text{c.d. in } \Omega, \tag{4.44}$$

dulà che α_0 , γ_0 a son costantis positivis. Di (4.41), (4.43) e (4.44) o vin ancje

$$a_i(x) \geq tl^2\alpha_0^h > 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad b_j(x) \geq t^3l^2\beta_0^h > 0, \quad j = 0, 1, \quad \text{c.d. in } \Omega, \tag{4.45}$$

dulà che $\alpha_0^h = \frac{2}{15}\alpha_0$ e $\beta_0^h = \frac{1}{30}\alpha_0$. Si che duncje, di (4.44), (4.45) o otignìn chestis cundizions di convessità fuarte su $\mathbb{P} + \mathbb{P}^h$ e $\mathbb{Q}$ (che si viodi il Leme 2.1 te sezion 2.4). Par ogni $A \in \widehat{\mathbb{M}}^2$ o vin

$$(\mathbb{P} + \mathbb{P}^h)A \cdot A \geq t(t^2 + l^2)\xi_{\mathbb{P}}|A|^2 \quad \text{c.d. in } \Omega; \quad (4.46)$$

par ogni $B \in \widehat{\mathbb{M}}^3$ o vin

$$\mathbb{Q}B \cdot B \geq t^3 l^2 \xi_{\mathbb{Q}}|B|^2 \quad \text{c.d. in } \Omega; \quad (4.47)$$

dulà che $\xi_{\mathbb{P}}, \xi_{\mathbb{Q}}$ a son costantis positivis dependentis dome di α_0 e γ_0 .

In tierç lûc, metìn che la inclusion discognossude e sedi costituide di materiâl “plui dûr” a pet dal materiâl de nanoplache ator ator de inclusion intal sens seguitîf (limitazions sui salts):

a esistin $\eta > 0$, $\bar{\eta} > 0$ e $\delta > 1$, $\bar{\delta} > 1$ tât che

$$\eta(\mathbb{P} + \mathbb{P}^h) \leq (\tilde{\mathbb{P}} + \tilde{\mathbb{P}}^h) - (\mathbb{P} + \mathbb{P}^h) \leq (\delta - 1)(\mathbb{P} + \mathbb{P}^h), \quad \text{c.d. in } \Omega, \quad (4.48)$$

$$\bar{\eta}\mathbb{Q} \leq \tilde{\mathbb{Q}} - \mathbb{Q} \leq (\bar{\delta} - 1)\mathbb{Q}, \quad \text{c.d. in } \Omega. \quad (4.49)$$

Chi, $\bar{\eta}\mathbb{Q} \leq \tilde{\mathbb{Q}} - \mathbb{Q}$ al vûl dî che $\bar{\eta}\mathbb{Q}A \cdot A \leq (\tilde{\mathbb{Q}} - \mathbb{Q})A \cdot A$ par ogni $A \in \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^3, \widehat{\mathbb{M}}^3)$, e chel istès pai tensôrs di cuart ordin.

O precisìn che lis ipotesis fatis parsore a garantissin che $\tilde{\mathbb{P}} + \tilde{\mathbb{P}}^h$ e $\tilde{\mathbb{Q}}$ a son convès in sens fuart c.d. in Ω .

Infin, par ce che al tocje la regolaritât di $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^h$ e $\mathbb{Q}$, o assumìn che $\mathbb{P}, \mathbb{P}^h \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$ e $\mathbb{Q} \in C^{2,1}(\bar{\Omega})$, cun

$$\|\mathbb{P}\|_{C^{1,1}(\bar{\Omega})} + \|\mathbb{P}^h\|_{C^{1,1}(\bar{\Omega})} + r_0^{-2}\|\mathbb{Q}\|_{C^{2,1}(\bar{\Omega})} \leq M_2 r_0^3, \quad (4.50)$$

cun M_2 dependent di $\frac{t}{r_0}, \frac{l}{r_0}$.

I dâts al contor che a comparissin in (4.15)–(4.17) a son assumûts tât di sodisfâ lis cundizions di compatibilitât (4.19) e di jessi cussî che

$$\widehat{V} \in H^{-3/2}(\partial\Omega), \quad \widehat{M}_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \quad \widehat{M}_n^h \in H^{1/2}(\partial\Omega). \quad (4.51)$$

Di chi indenant, o indichìn cun u , u_0 lis soluzions dal probleme di ecuilibri pe nanoplache (4.14)–(4.17) cun e cence inclusion, o sedi $u \in H^3(\Omega)$ e je la soluzion di (4.14)–(4.17) cuant che $M(u) = -(\chi_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}}(\mathbb{P} + \mathbb{P}^h) + \chi_{\tilde{\Omega}}(\tilde{\mathbb{P}} + \tilde{\mathbb{P}}^h))D^2u$, $\overline{M}^h(u) = (\chi_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}}\mathbb{Q} + \chi_{\tilde{\Omega}}\tilde{\mathbb{Q}})D^3u$ e $u_0 \in H^3(\Omega)$ e je la soluzion di (4.14)–(4.17) cuant che $M(u_0) = -(\mathbb{P} + \mathbb{P}^h)D^2u_0$,

$\widehat{M}^h(u_0) = \mathbb{Q}D^3u_0$. O ricuardin che u e u_0 a son determinâts in mût univoc des cundizions di normalizazion (4.30) e notìn che i dâts al contor $\widehat{V}$, $\widehat{M}_n$, $\widehat{M}_n^h$ associâts al probleme par u e u_0 a son i *stes*.

O introdusìn cumò il lavôr esercitât da dâts al contor cuant che la inclusion $\widetilde{\Omega}$ e je, rispetivementri, presinte o assente:

$$W = L(u) = - \int_{\partial\Omega} \widehat{V}u + \widehat{M}_n u_{,n} + \widehat{M}_n^h u_{,nn}, \quad (4.52)$$

$$W_0 = L(u_0) = - \int_{\partial\Omega} \widehat{V}u_0 + \widehat{M}_n u_{0,n} + \widehat{M}_n^h u_{0,nn}. \quad (4.53)$$

Chescj lavôrs a coincidin cu la energjie di deformazion immagazeneade inte nanoplache deformade, o sedi

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Omega} (\chi_{\Omega \setminus \widetilde{\Omega}}(\mathbb{P} + \mathbb{P}^h) + \chi_{\widetilde{\Omega}}(\widetilde{\mathbb{P}} + \widetilde{\mathbb{P}}^h)) D^2u \cdot D^2u + \\ &+ \int_{\Omega} (\chi_{\Omega \setminus \widetilde{\Omega}}\mathbb{Q} + \chi_{\widetilde{\Omega}}\widetilde{\mathbb{Q}}) D^3u \cdot D^3u, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$W_0 = \int_{\Omega} (\mathbb{P} + \mathbb{P}^h) D^2u_0 \cdot D^2u_0 + \mathbb{Q}D^3u_0 \cdot D^3u_0. \quad (4.55)$$

4.4.2 Risultâts principâi

I doi teoremi seguitîfs a dan dongje i nestris principâi risultâts relatîfs aes stimis di grandece pes nanoplachis cun inclusions duris; si viodi Morassi et al. (2023b).

Teoreme 4.5 (Limit inferiôr di $|\widetilde{\Omega}|$). *Al sedi Ω un domini limitât in $\mathbb{R}^2$ cussì che $\partial\Omega$ al sedi di classe $C^{2,1}$ cun costantis r_0 , M_0 e che al sodisfe (4.13). Al sedi $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, un sotinsiemi misurabil di Ω che al sodisfe*

$$\text{dist}(\widetilde{\Omega}, \partial\Omega) \geq d_0 r_0, \quad (4.56)$$

dulà che $d_0 > e$ je une costante. O assumin che i tensôrs $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^h$, $\widetilde{\mathbb{P}}$, $\widetilde{\mathbb{P}}^h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^2, \widehat{\mathbb{M}}^2))$ e $\mathbb{Q}$, $\widetilde{\mathbb{Q}} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^3, \widehat{\mathbb{M}}^3))$ a sodisfin lis cundizions di simetrie (4.21), (4.22) e (4.25), lis cundizions di convessitât fuarte (4.23) e (4.26), e lis cundizions di salt (4.48)–(4.49). Cun di plui, o assumin che i tensôrs $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^h$, $\mathbb{Q}$ a sedin tâi di sodisfâ lis cundizions di regolaritât (4.50).

O vin

$$|\tilde{\Omega}| \geq C_1^+ r_0^2 \frac{W_0 - W}{W}, \quad (4.57)$$

dulà che la costante C_1^+ e dipent dome di $\frac{t}{r_0}$, M_0 , M_1 , d_0 , $\xi_{\mathbb{P}}$, $\xi_{\mathbb{Q}}$, M_2 , δ , $\bar{\delta}$.

Teoreme 4.6 (Limit superiôr di $|\tilde{\Omega}|$). *Al sedi Ω un domini limitât in $\mathbb{R}^2$ tâl che $\partial\Omega$ cussì che al sedi di classe $C^{3,1}$ cun costantis r_0 , M_0 e che al sodisfi (4.13). Al sedi $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\Omega} \subset \subset \Omega$, un sotinsiemi misurabil di Ω , che al sodisfe*

$$\text{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega) \geq d_0 r_0, \quad (4.58)$$

dulà che d_0 e je une costante positive. O assumìn che i tensôrs $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^h \in C^{1,1}(\tilde{\Omega}, \mathcal{L}(\tilde{\mathbb{M}}^2, \tilde{\mathbb{M}}^2))$ e $\mathbb{Q} \in C^{2,1}(\tilde{\Omega}, \mathcal{L}(\tilde{\mathbb{M}}^3, \tilde{\mathbb{M}}^3))$ a sodisfin, in maniere rispetive, lis cundizions isotropichis (4.36), (4.37) e (4.38) e che i modui di Lamé μ e λ a sodisfin lis cundizions di convessità fuerte (4.44). O assumìn $\tilde{\mathbb{P}}$, $\tilde{\mathbb{P}}^h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\tilde{\mathbb{M}}^2, \tilde{\mathbb{M}}^2))$ e $\tilde{\mathbb{Q}} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\tilde{\mathbb{M}}^3, \tilde{\mathbb{M}}^3))$ e o assumìn lis cundizions di salt (4.48)–(4.49).

O vin

$$|\tilde{\Omega}| \leq C_2^+ r_0^2 \left(\frac{W_0 - W}{W_0} \right)^{1/p}, \quad (4.59)$$

dulà che lis costantis C_2^+ e $p > 1$ a dipendin dome di $\frac{t}{r_0}$, $\frac{l}{r_0}$, M_0 , M_1 , d_0 , α_0 , γ_0 , M_2 , η , $\bar{\eta}$, δ , $\bar{\delta}$ e dal rapuart

$$F = \frac{\|\widehat{V}\|_{H^{-3/2}(\partial\Omega)} + r_0^{-1} \|\widehat{M}_n\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} + r_0^{-2} \|\widehat{M}_n^h\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}}{\|\widehat{V}\|_{H^{-5/2}(\partial\Omega)} + r_0^{-1} \|\widehat{M}_n\|_{H^{-3/2}(\partial\Omega)} + r_0^{-2} \|\widehat{M}_n^h\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}}. \quad (4.60)$$

4.5 Leme de energjie e dimostrazion dal limit inferiôr. Premetìn chest leme de energjie, che al aferme che la difference di lavôr $|W - W_0|$ e je stimade dal alt e dal bas de energjie di deformazion de soluzion no perturbade u_0 imagazenade inte inclusion $\tilde{\Omega}$.

Leme 4.7 (Leme de energjie). *Assumìn che Ω al sedi un domini limitât in $\mathbb{R}^2$, tâl che $\partial\Omega$ al sedi di classe $C^{2,1}$. Assumìn, po, che $\tilde{\Omega}$ al sedi un sotinsiemi misurabil di Ω . Assumìn che i tensôrs $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^h$, $\tilde{\mathbb{P}}$, $\tilde{\mathbb{P}}^h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\tilde{\mathbb{M}}^2, \tilde{\mathbb{M}}^2))$ e $\mathbb{Q}$, $\tilde{\mathbb{Q}} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\tilde{\mathbb{M}}^3, \tilde{\mathbb{M}}^3))$ a sodisfin, rispetivementri, lis cundizions di simetrie (4.21), (4.22), (4.25). E, in*

ultin, o assumìn che $\xi_0, \xi_1, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1, 0 < \xi_0 < \xi_1, 0 < \bar{\xi}_0 < \bar{\xi}_1$, a sedin tât che

$$t^3 \xi_0 |A|^2 \leq (\mathbb{P}(x) + \mathbb{P}^h(x)) A \cdot A \leq t^3 \xi_1 |A|^2 \quad \text{c.d. } x \in \Omega, \quad (4.61)$$

$$t^5 \bar{\xi}_0 |B|^2 \leq \mathbb{Q}(x) B \cdot B \leq t^5 \bar{\xi}_1 |B|^2 \quad \text{c.d. } x \in \Omega, \quad (4.62)$$

par ogni matric $A \in \widehat{\mathbb{M}}^2$ e $B \in \widehat{\mathbb{M}}^3$. O assumìn che i salts $(\widetilde{\mathbb{P}} + \widetilde{\mathbb{P}}^h) - (\mathbb{P} + \mathbb{P}^h)$, $\widetilde{\mathbb{Q}} - \mathbb{Q}$ a sodisfin (4.48)–(4.49). E sedi $u, u_0 \in H^3(\Omega)$ la soluzion debile al probleme (4.14)–(4.17), normalizade come in (4.30), cuant che la inclusion $\widetilde{\Omega}$ e je, rispetivementri, presinte o assente, pai dâts di Neumann $\widehat{V} \in H^{-5/2}(\partial\Omega)$, $\widehat{M}_n \in H^{-3/2}(\partial\Omega)$, $\widehat{M}_n^h \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ che a sodisfin lis cundizions di compatibilitât (4.19).

O vin

$$\begin{aligned} \frac{\eta_* \xi_{0*} t^3}{\delta^*} \int_{\widetilde{\Omega}} |D^2 u_0|^2 + t^2 |D^3 u_0|^2 &\leq W_0 - W \leq \\ &\leq (\delta^* - 1) \xi_1^* t^3 \int_{\widetilde{\Omega}} |D^2 u_0|^2 + t^2 |D^3 u_0|^2, \end{aligned} \quad (4.63)$$

dulà che $\eta_* = \min\{\eta, \bar{\eta}\}$, $\delta^* = \max\{\delta, \bar{\delta}\}$, $\xi_{0*} = \min\{\xi_0, \bar{\xi}_0\}$, $\xi_1^* = \max\{\xi_1, \bar{\xi}_1\}$.

Note 4.8. Notìn che se i materiâi che a costituissin la inclusion $\widetilde{\Omega}$ e il materiâl ator in $\Omega \setminus \widetilde{\Omega}$ a son isotrops cun modui di Lamé $\widetilde{\mu}$, $\widetilde{\lambda}$ e μ , λ , rispetivementri, alore lis cundizions di salt (4.48), (4.49) a puedin jessi scritis tai tiermins de difference $\widetilde{\mu} - \mu$ e $\widetilde{\kappa} - \kappa$, dulà che $\widetilde{\kappa} = \frac{2\widetilde{\mu}(2\widetilde{\mu}+3\widetilde{\lambda})}{2\widetilde{\mu}+\widetilde{\lambda}}$, $\kappa = \frac{2\mu(2\mu+3\lambda)}{2\mu+\lambda}$.

Dimostrazion dal Teoreme 4.5. Stimìn la bande a man drete di (4.63). O notìn che al esist $d^*, 0 < d^* < d_0$, che al dipent dome di M_0 , cussì che $\Omega_{d^* r_0}$ al è di classe Lipschitz cun costantis $\gamma r_0, \gamma' M_0$, dulà che $0 < \gamma < 1$ e $\gamma' > 1$ a dipendin dome di M_0 , e $\widetilde{\Omega} \subset \Omega_{d^* r_0}$; che si viodi Gilbarg e Trudinger (1983, Leme 14.16) pai detais. Pal Teoreme di Imersion di Sobolev (Adams, 1975, Cjapitul 5, Teoreme 5.4)

$$\begin{aligned} W_0 - W &\leq C r_0^3 \int_{\widetilde{\Omega}} |D^2 u_0|^2 + r_0^2 |D^3 u_0|^2 \leq \\ &\leq C r_0^3 |\widetilde{\Omega}| \left(\|D^2 u\|_{L^\infty(\widetilde{\Omega})}^2 + r_0^2 \|D^3 u\|_{L^\infty(\widetilde{\Omega})}^2 \right) \leq C \frac{1}{r_0} |\widetilde{\Omega}| \|u_0\|_{H^6(\Omega_{d^* r_0})}^2. \end{aligned} \quad (4.64)$$

O osservìn che, cun un argument di cuvertidure e stimis di regolarità interne (4.35), o vin

$$\|u_0\|_{H^6(\Omega_{d^*r_0})}^2 \leq C \frac{1}{r_0} \|u_0\|_{H^3(\Omega)}^2. \quad (4.65)$$

Duncje, des (4.64) e (4.65), de disavualance standard di Poincaré (Morassi et al., 2007, Proposizion 3.3), cun (4.46), (4.47) e (4.55), o otignìn

$$\begin{aligned} W_0 - W &\leq C \frac{1}{r_0} |\tilde{\Omega}| \|u_0\|_{H^3(\Omega)}^2 \leq r_0 |\tilde{\Omega}| \int_{\Omega} |D^2 u_0|^2 + r_0^2 |D^3 u_0|^2 \leq \\ &\leq C \frac{|\tilde{\Omega}|}{r_0^2} \int_{\Omega} (\mathbb{P} + \mathbb{P}^h) D^2 u_0 \cdot D^2 u_0 + \mathbb{Q} D^3 u_0 \cdot D^3 u_0 = \frac{C}{r_0^2} |\tilde{\Omega}| W_0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

dulà che $C > 0$ al dipent di $d_0, \delta, \bar{\delta}, \frac{t}{r_0}, M_0, M_1, \xi_{\mathbb{P}}, \xi_{\mathbb{Q}}, M_2$. Duncje, e ven daùr la stime (4.57). $\square$

4.6 Continuatione uniche e dimostrazione dal limit superior. Come che o vin premetùt inte seziun introduttive, il limit superior di $|\tilde{\Omega}|$ al domande stimis cuantitativis de continuatione uniche pe soluzion u_0 al probleme no perturbât. Scomencìn reclamant inte Proposizion 4.9 i elements fondamentâi di chestis stimis sot forme di disavualance des trê sferis e disavualance di dopleament locâl pe matric Hessiane de soluzion; par plui details e dimostrazioni si viodi Morassi et al. (2024).

Proposizion 4.9 (Disavualance di dopleament e disavualance des trê sferis pe Hessiane). *Assumìn che i tensôrs dal materiâl $\mathbb{P}, \mathbb{P}^h \in C^{1,1}(\overline{B_1}, \mathcal{L}(\hat{\mathbb{M}}^2, \hat{\mathbb{M}}^2))$, $\mathbb{Q} \in C^{2,1}(\overline{B_1}, \mathcal{L}(\hat{\mathbb{M}}^3, \hat{\mathbb{M}}^3))$ a sedin dâts di (4.36), (4.37), (4.38) e che a sodisfin, rispetivementri, la cundizion di regolarità (4.50), lis cundizioni di convessità fuerte (4.46), (4.47). Assumìn che $u_0 \in H^6(B_1)$ e sedi la soluzion debile a (4.14).*

Al esist alore $C > 1$, che al dipent dome di $M_2, \alpha_0, \gamma_0, t, l$, cussì che, par ogni $0 < r < \frac{R_1}{2^{11}}$ o vin

$$\int_{B_{2r}} |D^2 u_0|^2 \leq C \bar{N}^{3\bar{k}} \int_{B_r} |D^2 u_0|^2, \quad (4.67)$$

dulà che

$$\bar{N} = \frac{\|D^2 u_0\|_{L^2(B_{R_1})}^2}{\|D^2 u_0\|_{L^2(B_{R_1/2^9})}^2} \quad (4.68)$$

e $\bar{k} = 8$.

Cun di plui, se $2r \leq s \leq \frac{R_1}{2^{11}}$ alore o vin

$$\int_{B_s} |D^2 u_0|^2 \leq \left(C \int_{B_{R_1/2}} |D^2 u_0|^2 \right)^{1-\theta(s,r)} \left(\int_{B_r} |D^2 u_0|^2 \right)^{\theta(s,r)}, \quad (4.69)$$

dulà che

$$\theta(s, r) = \frac{1}{1 + 6\bar{k} \log_2 \frac{s}{r}} \quad (4.70)$$

cun $\bar{k} = 8$.

Par otignî il limit superiôr desiderât, o doprîm ancjemò il Leme de energjie 4.7. In ogni câs, tal stimâ la integrâl $\int_{\bar{\Omega}} |D^2 u_0|^2 + |D^3 u_0|^2$ dal bas, si à di frontâ il pussibil anulament di $D^2 u_0$ e $D^3 u_0$ intai ponts internis. A chest fin, un strument fondamentâl al è un risultât di continuazion uniche, cognossût tant che *propagazion Lipschitz de piçulece*. La sô dimostrazion si base prin di dut suntune iterazion de disavualance des trê sferis (4.69).

Proposizion 4.10 (Propagazion Lipschitz de piçulece). *Al sedi Ω un domini limitât in $\mathbb{R}^2$, cussì che $\partial\Omega$ al è di classe $C^{3,1}$, cun costantis r_0, M_0 , e che al sodisfe lis cundizions (4.13). Assumìn che il tensôr $\mathbb{P}, \mathbb{P}^h \in C^{1,1}(\bar{\Omega}, \mathcal{L}(\hat{\mathbb{M}}^2, \hat{\mathbb{M}}^2))$, $\mathbb{Q} \in C^{2,1}(\bar{\Omega}, \mathcal{L}(\hat{\mathbb{M}}^3, \hat{\mathbb{M}}^3))$, al sedi dât, rispetivementri, di (4.36), (4.37) e (4.38) e che al sodisfi la cundizion di eliticitât (4.44). E sedi $u_0 \in H^3(\Omega)$ la uniche soluzion dal probleme (4.14)–(4.17) normalizade di (4.30), cun dâts di Neumann $\hat{V} \in H^{-3/2}(\partial\Omega)$, $\hat{M}_n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, $\hat{M}_n^h \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ che e sodisfe la cundizion di compatibilitât (4.19). Al esist $\chi > 1$ che al dipent dome di $\alpha_0, \gamma_0, M_2, \frac{t}{r_0}$ e $\frac{l}{r_0}$ cussì che par ogni $s > 0$ e par ogni $x \in \Omega_{\chi s r_0}$ o vin che*

$$\int_{B_{s r_0}(x)} |D^2 u_0|^2 \geq C_s \int_{\Omega} |D^2 u_0|^2, \quad (4.71)$$

dulà che $C_s > 0$ al dipent dome di $M_0, M_1, \frac{t}{r_0}, \frac{l}{r_0}, \alpha_0, \gamma_0, M_2, s$ e dal rapuart di F dât in (4.60).

La propagazion Lipschitz de piçulece e je utile par otignî une disavualance di dopleament pe Hessiane de soluzion u_0 in tiermins di dâts al contor.

Proposizion 4.11 (Disavualance di dopleament pe Hessiane in tiermins di dâts al contor). *Sot de ipotesî dal Teoreme 4.6, o assumìn che $u_0 \in H^3(\Omega)$ e sedi la soluzion uniche a (4.14)-(4.17) che e sodisfe (4.30), cun $\widehat{V}, \widehat{M}_n, \widehat{M}_n^h$ che a sodisfin (4.18) e (4.19). E esist une costante $\theta, 0 < \theta < 1$, dipendente dome di $\alpha_0, \gamma_0, M_2, \frac{t}{r_0}, \frac{l}{r_0}$, cussì che par ogni $\bar{r} > 0$ e par ogni $x_0 \in \Omega_{\bar{r}r_0}$, o vin*

$$\int_{B_{2r}(x_0)} |D^2 u_0|^2 \leq K \int_{B_r(x_0)} |D^2 u_0|^2 \quad (4.72)$$

par ogni $r, 0 < r < \frac{\theta}{2} \bar{r} r_0$, dulà che $K > 0$ al dipent dome di $\alpha_0, \gamma_0, M_2, M_0, M_1, \bar{r}, \frac{t}{r_0}, \frac{l}{r_0}$ e dal rapuart F dât di (4.60).

Dimostrazion de proposizion 4.11. Aplicant un argument di riscjalament a (4.67) e (4.68), e esist une costante assolute $\theta, 0 < \theta < 1$ cussì che par ogni $\bar{r} > 0$ e par ogni $x_0 \in \Omega_{\bar{r}r_0}$ o vin

$$\int_{B_{2r}(x_0)} |D^2 u_0|^2 \leq K \int_{B_r(x_0)} |D^2 u_0|^2 \quad (4.73)$$

par ogni $r, 0 < r < \frac{\theta}{2} \bar{r} r_0$, dulà che la costante $K > 0$ al dipent dome di $\alpha_0, \gamma_0, M_2, \frac{t}{r_0}, \frac{l}{r_0}$ e $\bar{r}$ e in mût cressint dal rapuart

$$N = \frac{\int_{B_{\bar{r}r_0}(x_0)} |D^2 u_0|^2}{\int_{B_{\frac{\bar{r}r_0}{2^9}}(x_0)} |D^2 u_0|^2}. \quad (4.74)$$

Aplicant (4.71) par limitâ dal bas il denominadôr, otignìn il limit desiderât. $\square$

Infin, par dimostrâ il limit superiôr al covente introdusi un argument sofisticât che al ven de teorie dai pês di Muckenhoupt (che si viodi la Proposizion 4.12) basât soredut su la disavualance di dopleament (4.72).

Proposizion 4.12 (Proprietât A_p). *A sedin sodisfatis lis assunziions a priori de Proposizion 4.11. Par ogni $\bar{r} > 0$ al esist $B > 0$ e $p > 1$ cussì che par ogni $x_0 \in \Omega_{\bar{r}r_0}$ o vin*

$$\left(\frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} |D^2 u_0|^2 \right) \left(\frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} |D^2 u_0|^{-2/(p-1)} \right)^{p-1} \leq A, \\ \text{par ogni } r, 0 < r \leq \frac{\vartheta}{2} \bar{r} r_0, \quad (4.75)$$

dulà che ϑ al è come te *Proposizion 4.11* e dulà che A, p a dipendin dome di $\alpha_0, \gamma_0, M_2, M_0, M_1, \bar{r}, \frac{t}{r_0}, \frac{l}{r_0}$ e dal rapuart F dât di (4.60).

O riclamìn doi risultâts tecnics che a saran utii inte prossime dimostrazion.

Si à cheste disavualance di interpolazion (che si viodi il *Teoreme 7.25* in Gilbarg e Trudinger (1983): par ogni $u \in H^4(\Omega)$, o vin

$$\|u\|_{H^3(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^4(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad (4.76)$$

dulà che $C > 0$ al dipent dome di M_0, M_1 .

Leme 4.13. *Al sedi Ω un domini limitât in $\mathbb{R}^2$ cussì che $\partial\Omega$ al è di classe $C^{3,1}$ cun costantis r_0, M_0 che a sodisfin (4.13). O assumìn che $\mathbb{P}, \mathbb{P}^h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^2, \widehat{\mathbb{M}}^2))$, $\mathbb{Q} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\widehat{\mathbb{M}}^3, \widehat{\mathbb{M}}^3))$ al sodisfi lis cundizions di simetrie (4.21), (4.22) e (4.25) e lis ipotesis di convessità fuarte (4.23) e (4.26). Assumìn che $u_0 \in H^3(\Omega)$ e sedi la uniche soluzion debile al probleme (4.14)–(4.17), che e sodisfe la cundizion di normalizazion (4.30) cui dâts al contor che a sodisfin (4.18) e (4.19). O vin*

$$\|\widehat{V}\|_{H^{-5/2}(\partial\Omega)} + r_0^{-1} \|\widehat{M}_n\|_{H^{-3/2}(\partial\Omega)} + r_0^{-2} \|\widehat{M}_n^h\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq C \|u_0\|_{H^3(\Omega)}, \quad (4.77)$$

dulà che $C > 0$ al dipent di $M_0, M_1, \|\mathbb{P}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\mathbb{P}^h\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\mathbb{Q}\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Dimostrazion dal Teoreme 4.6. La dimostrazion si base essenzialmentri su la cumbinazion de stime A_p (4.75) cuntun argument di cuviertidure e sul ûs dal Leme de energjie 4.7.

O cuvierzìn $\widetilde{\Omega}$ cun cubis sieradis, che no si soreponin drenti Q_j , $j = 1, \dots, J$, cun lâs $\epsilon = \frac{\theta d_0}{4\sqrt{2}} r_0$, dulà che $\theta < 1$ al è stât introdôt inte *Proposizion 4.11*. Al sedi $p > 1$ l'esponent introdusût inte *Proposizion 4.12*. Pe disavualance di Hölder's o vin

$$|D| \leq \left(\int_{\bigcup_{j=1}^J Q_j} |D^2 u_0|^{-\frac{2}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_D |D^2 u_0|^2 \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.78)$$

Aplicant la *Proposizion 4.12*, cun $\bar{r} = \frac{d_0}{2}$ aes sferis B_j che a circoscrivin ogni Q_j , $j = 1, \dots, J$, o otignìn

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\bigcup_{j=1}^J Q_j} |D^2 u_0|^{-\frac{2}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} &\leq \left(\frac{\pi}{2} \epsilon^2 \sum_{j=1}^J \frac{1}{|B_j|} \int_{B_j} |D^2 u_0|^{-\frac{2}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \\
&\leq \left(\frac{\pi}{2} \epsilon^2 \sum_{j=1}^J \left(\frac{A}{\frac{1}{|B_j|} \int_{B_j} |D^2 u_0|^2} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \frac{\frac{\pi}{2} (J \epsilon^2)^{\frac{p-1}{p}} A^{\frac{1}{p}} \epsilon^{2/p}}{\min_j \left(\int_{B_j} |D^2 u_0|^2 \right)^{\frac{1}{p}}},
\end{aligned} \tag{4.79}$$

dulà che lis costantis p e A a dipendin dome di α_0 , γ_0 , M_2 , M_1 , M_0 , $\frac{t}{r_0}$, $\frac{l}{r_0}$, d_0 e dal rapuart F dât di (4.60). Cun (4.13) o vin

$$J \epsilon^2 = \sum_{j=1}^J |Q_j| \leq |\Omega| \leq M_1 r_0^2. \tag{4.80}$$

Di consequence, di (4.78)–(4.80) e riclamant la definizion di ϵ , o vin

$$|\tilde{\Omega}| \leq C r_0^2 \left(\frac{\int_D |D^2 u_0|^2}{\int_{B_{\bar{j}}} |D^2 u_0|^2} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.81}$$

cun $\bar{j}$ cussì che $\int_{B_{\bar{j}}} |D^2 u_0|^2 = \min_j \int_{B_j} |D^2 u_0|^2$.

De Proposizion 4.10, de disavualance standard di Poincarè e de disavualance di interpolazion (4.76), cun (4.77), (4.32), (4.50) e (4.55), o vin

$$\begin{aligned}
\int_{B_{\bar{j}}} |D^2 u_0|^2 &\geq C \int_{\Omega} |D^2 u_0|^2 \geq \frac{C}{r_0^2} \|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 \geq \\
&\geq \frac{C}{r_0^2} \left(\frac{\|u_0\|_{H^3(\Omega)}}{\|u_0\|_{H^4(\Omega)}} \right)^2 \cdot \|u_0\|_{H^3(\Omega)}^2 \geq \\
&\geq C F^{-2} \left(\int_{\Omega} |D^2 u_0|^2 + r_0^2 |D^3 u_0|^2 \right) \geq \frac{C}{r_0^3} W_0.
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Cun (4.81) e (4.82) o vin

$$|\tilde{\Omega}| \leq C r_0^2 \left(\frac{r_0^3 \int_D |D^2 u_0|^2}{W_0} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.83}$$

cu la constantă $C > 0$ care e depinde de $\alpha_0, \gamma_0, M_2, M_1, M_0, \frac{t}{r_0}, \frac{l}{r_0}, d_0$ e de raportul F dat de (4.60).

Înfin, de banda câmp de (4.63) e de (4.83), o concluzie obținut la limit superior par $|\tilde{\Omega}|$ în (4.59). $\square$

References/ Bibliografie

- R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- B. Akgoz and O. Civalek. Longitudinal vibration analysis for microbars based on strain gradient elasticity theory. *Journal of Vibration and Control*, 20:606–616, 2014.
- G. Alessandrini and E. Rosset. The inverse conductivity problem with one measurement: bounds on the size of the unknown object. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 58:1060–1071, 1998.
- G. Alessandrini, E. Rosset, and J.K. Seo. Optimal size estimates for the inverse conductivity problem with one measurement. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 128:53–64, 2000.
- G. Alessandrini, A. Morassi, and E. Rosset. Size estimates. *Contemporary Mathematics*, 333:1–33, 2003.
- G. Alessandrini, A. Morassi, E. Rosset, E. Sincich, and S. Vessella. Stable determination of the Winkler subgrade coefficient in a nanoplate. *Preprint*, 2024.
- B. Arash, J.W. Jiang, and T. Rabczuk. A review on nanomechanical resonators and their applications in sensors and molecular transportation. *Applied Physics Reviews*, Paper 021301, 2015.
- V. Barilon. On the uniqueness of inverse eigenvalue problems. *Geophysical Journal of the Royal Astronautic Society*, 39:287–298, 1974.
- D. Barnes and R. Knobel. The inverse eigenvalue problem with finite data for partial differential equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 26:616–632, 1995.
- D.C. Barnes. The inverse eigenvalue problem with finite data. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 22:732–753, 1991.

- G. Borg. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte. *Acta Mathematica*, 78:1–96, 1946.
- A. Bouchaala. Size effect of a uniformly distributed added mass on a nanoelectromechanical resonator. *Microsystem Technologies*, 24(6): 2765–2774, 2018.
- A. Bouchaala, A.H. Nayfeh, N. Jaber, and M. Younis. Mass and position determination in mems mass sensors: a theoretical and an experimental investigation. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Paper 105009, 2016.
- L. Caudill, P.A. Perry, and A.W. Schueller. Isospectral sets for fourth-order ordinary differential operators. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 29:935–966, 1998.
- C. Chen, J. Yuan, and Y. Mao. Post-buckling of size-dependent microplate considering damage effects. *Nonlinear Dynamics*, 90:1301–1314, 2017.
- R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics (first English edition)*. Interscience Publishers Inc., New York, 1966.
- M. Di Cristo and L. Rondi. Examples of exponential instability for elliptic inverse problems. *Inverse Problems*, 19:685–701, 2003.
- M. Dilena, M. Fedele Dell’Oste, J. Fernández-Sáez, A. Morassi, and R. Zaera. Mass detection in nanobeams from bending resonant frequency shifts. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 116:261–276, 2019.
- M. Dilena, M. Fedele Dell’Oste, J. Fernández-Sáez, A. Morassi, and R. Zaera. Hearing distributed mass in nanobeam resonators. *International Journal of Solids and Structures*, 193–194:568–592, 2020.
- M. Dilena, M. Fedele Dell’Oste, J. Fernández-Sáez, A. Morassi, and R. Zaera. Identification of general added mass distribution in nanorods from two-spectra finite data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Paper 106286, 2019a.

- M. Dilella, M. Fedele Dell'Oste, J. Fernández-Sáez, A. Morassi, and R. Zaera. Recovering added mass in nanoresonator sensors from finite axial eigenfrequency data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 130:122–151, 2019b.
- K. Eom, H.S. Park, D.S. Yoon, and T. Kwon. Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: Nanomechanics principles. *Physics Reports*, 503:115–163, 2011.
- N.A. Fleck and J.W. Hutchinson. Strain gradient plasticity. *Advances in Applied Mechanics*, 33:296–361, 1997.
- N. Garofalo and F.H. Lin. Monotonicity properties of variational integrals, ap weights and unique continuation. *Indiana University Mathematical Journal*, 35:245–268, 1986.
- D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, 1983.
- G.M.L. Gladwell. *Inverse Problems in Vibration*, 2nd edn. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 2004.
- O.H. Hald. The inverse Sturm-Liouville problem with symmetrical potentials. *Acta Mathematica*, 141:263–291, 1978a.
- O.H. Hald. The inverse Sturm-Liouville problem and the Rayleigh-Ritz method. *Mathematics of Computation*, 32:687–705, 1978b.
- M.S. Hanay, S. Kelber, C.D. O'Connell, P. Mulvaney, J.E. Sader, and M.L. Roukes. Inertial imaging with nanomechanical systems. *Nature Nanotechnology*, 10(4):339–344, 2015.
- H. Hochstadt and B. Lieberman. An inverse Sturm–Liouville problem with mixed given data. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34(4):676–680, 1978.
- V. Isakov. On uniqueness of recovery of a discontinuous conductivity coefficient. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41: 865–877, 1988.
- V. Isakov. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1998.

- B. Jalalahmadi, F. Sadeghi, and D. Peroulis. A numerical fatigue damage model for life scatter of mems devices. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 18:1016–1031, 2009.
- H. Kang, J.K. Seo, and D. Sheen. The inverse conductivity problem with one measurement: stability and estimation of size. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 28:1389–1405, 1997.
- M. Kelleci, H. Aydogmus, L. Aslanbas, S.O. Erbil, and M.S. Hanay. Towards microwave imaging of cells. *Lab on a Chip*, 18:463–472, 2018.
- R. Knobel and B. Lowe. An inverse Sturm-Liouville problem for an impedance. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 44: 433–450, 1993.
- S. Kong, S. Zhou, Z. Nie, and K. Wang. Static and dynamic analysis of micro-beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47:487–498, 2009.
- D.C.C. Lam, F. Yang, A.C.M. Chong, J. Wang, and P. Tong. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51:1477–1508, 2003.
- E.M. Landis. A three-sphere theorem. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 148:277–279, 1963.
- B.M. Levitan. *Inverse Sturm-Liouville Problems*. VNU Science Press, 1987.
- X.F. Li, G.J. Tang, Z. B. Shen, and K.Y. Lee. Resonance frequency and mass identification of zeptogram-scale nanosensor based on the nonlocal beam theory. *Ultrasonics*, 55:75–84, 2015.
- J. McLaughlin. Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data. *SIAM Review*, 28:53–72, 1986.
- J. McLaughlin. Stability theorems for inverse spectral problems. *Inverse Problems*, 4:529–540, 1988.
- R.D. Mindlin. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16:51–78, 1964.

- R.D. Mindlin. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1:417–438, 1965.
- R.D. Mindlin and N. Eshel. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4:109–124, 1968.
- R.D. Mindlin and H.F. Tiersten. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11:415–448, 1962.
- A. Morassi. Damage detection and generalized Fourier coefficients. *Journal of Sound and Vibration*, 302:229–259, 2007.
- A. Morassi, E. Rosset, and S. Vessella. Size estimates for inclusions in an elastic plate by boundary measurements. *Indiana University Mathematical Journal*, 56:2325–2384, 2007.
- A. Morassi, A. Kawano, and R. Zaera. Inverse load identification in vibrating nanoplates. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46:1045–1075, 2023a.
- A. Morassi, E. Rosset, E. Sincich, and S. Vessella. Size estimates for nanoplates. *Inverse Problems*, Paper 065005, 2023b.
- A. Morassi, E. Rosset, E. Sincich, and S. Vessella. Strong unique continuation and global regularity estimates for nanoplates. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 203:235–271, 2024.
- A. Morassi, J. Fernández-Sáez, R. Zaera, and J.A. Loya. Resonator-based detection in nanorods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 93:645–660, 2017.
- A. Munawar, Y. Ong, R. Schirhagl, M.A. Tahir, W.S. Khan, and S.Z. Bajwa. Nanosensors for diagnosis with optical, electric and mechanical transducers. *RSC advances*, 9:6793–6803, 2019.
- I. Munch, P. Neff, A. Madeo, and I.D. Ghiba. The modified indeterminate couple stress model: Why Yang et al.’s arguments motivating a symmetric couple stress tensor contain a gap and why the couple

- stress tensor may be chosen symmetric nevertheless. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 97:1524–1554, 2017.
- C. Polizzotto. A hierarchy of simplified constitutive models within isotropic strain gradient elasticity. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 61:92–109, 2017.
- J. Pöschel and E. Trubowitz. *Inverse Spectral Theory*. Academic Press, 1987.
- J.E. Sader, M.S. Hanay, A.P. Neumann, and M.L. Roukes. Mass spectrometry using nanomechanical systems: beyond the point-mass approximation. *Nano Letters*, 18:1608–1614, 2018.
- A.W. Schueller. Uniqueness for near-constant data in fourth-order inverse eigenvalue problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 258:658–670, 2001.
- A.S.J. Suiker and C.S. Chang. Application of higher-order tensor theory for formulating enhanced continuum models. *Acta Mechanica*, 142: 223–234, 2000.
- J. Tamayo. Optomechanics to the rescue. *Nature nanotechnology*, 10: 738–739, 2015.
- J. Tamayo, D. Ramos, J. Mertens, and M. Calleja. Effect of the adsorbate stiffness on the resonance response of microcantilever sensors. *Applied Physics Letters*, Paper 224104, 2006.
- R.A. Toupin. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 11:385–414, 1962.
- R.A. Toupin. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 17:85–112, 1964.
- B. Wang, S. Zhou, J. Zhao, and X. Chen. A size-dependent kirchhoff micro-plate model based on strain gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 30:517–524, 2011.

- Q. Wang and B. Arash. A review on applications of carbon nanotubes and graphenes as nano-resonator sensors. *Computational Materials Science*, 82:350–360, 2014.
- H. Weyl. *Classical Groups*. Princeton University Press, 1946.
- F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, and P. Tong. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39:2731–2743, 2002.
- J. Yuan, X. Zhang, and C. Chen. Nonlinear vibration analysis of damaged micro-plate considering size effect. *Shock and Vibration*, Paper 8897987, 2020.