Gjornâl Furlan des Siencis **31**. 2021, 47-64

Introduzion ai problemis inviers dai autovalôrs in une dimension

ANTONINO MORASSI*

Ristret. L'obietîf di chestis notis al è presentâ une introduzion elementâr ai problemis inviers classics dai autovalôrs in une dimension. Si concentre la atenzion prin di dut su la metodiche di Borg pe identificazion uniche dal potenziâl intun operadôr diferenziâl di Sturm-Liouville dât in forme canoniche suntun interval finît.

Key–words. Problemis inviers di autovalôrs, operadôrs di Sturm-Liouville, unicitât, metodiche di Borg.

1. Introduzion. La teorie classiche des vibrazions si interesse de determinazion de rispueste di un determinât sisteme dinamic a un input prescrit. Chescj problemis a son definîts *problemis direts di vibrazion* e, in dì di vuê si à a disposizion metodis analitics e numerics une vore potents par risolviju. In ogni câs, cuant che si studie un fenomen guviernât des ecuazions de dinamiche classiche, la aplicazion dal model aes situazions reâls dispès e domande la cognossince di parametris costitutîfs o gjeometrics che inte formulazion direte a son considerâts part dai dâts, intant che te pratiche no son cognossûts ad implen o no son acessibii aes misurazions diretis.

Si che duncje, in diviersis areis de sience aplicade e de tecnologjie, si àn di frontâ *problemis inviers di vibrazion*, ven a stâi problemis là che i rûi des incognitis e dai dâts a son, almancul in part, invertîts. Par esempli, un dai problemis fondamentâi de teorie direte des vibrazions - pes vibrazions libaris infinitesimâls - al è chel de determinazion des frecuencis naturâls e dai mûts normâi dal cuarp in vibrazion, assumint

* Dipartiment Politecnic di Inzegnarie e Architeture, Universitât dal Friûl, Udin, Italie.
E-mail: antonino.morassi@uniud.it

che lis proprietâts elastichis e inerziâls a sedin cognossudis. Intal contest de teorie invierse, al contrari, si trate di costruî un model mecanic in une determinade classe di sistemis che al vedi fissadis (par esempli, misuradis) proprietâts dai siei autovalôrs.

Di là des sôs aplicazions pratichis, il studi dai problemis inviers di vibrazion al à ancje un interès matematic intrinsic, stant che i problemis di risolvi a àn carateristichis impuartantis in tiermins di origjinalitât e dificoltât tecniche, se confrontâts cui problemis classics de teorie dirづete. Di fat, i problemis inviers par solit no sodisfin i postulâts di probleme ben ponût di Hadamard. Cun di plui, in tancj câs, a son une vore no lineârs, ancje cuant che il probleme diret al è lineâr. Inte plui part dai câs, par passâ chescj ostacui, al è impussibil doprâ proceduris teorichis za prontis. Al covente, invezit, individuâ une impostazion juste e cjatâ un compromès cu la proprietât intrinsiche di jessi mal ponûts di chescj problemis, doprant ideis origjinâls e ricorint a un ûs aprofondît di metodis matematics. Un altri aspiet specific e fondamentâl dal studi dai problemis inviers al rivuarde il disvilup di strategjiis specifichis pal tratament di problemis mâl condizionâts. Par finî, cuant che lis tecnichis invierssis a vegnin aplicadis al studi di problemis reâi, a nassin altris ostacui par vie de complessitât de modelazion mecaniche, de inadeguatece dai modei analitics doprâts pe interpretazion dai esperiments, dai erôrs di misurazion e de scjarse completece dai dâts disponibii sul cjamp. Si che duncje, pes aplicazions pratichis, al è di impuartance particolâr valutâ la stabilitât dai algoritmis rispiet ai erôrs di misurazion e rispiet ae precision dai modei analitics doprâts par descrivi il fenomen fisic.

Par fissâ lis ideis, o cjapin un esempli paradigmatic di probleme inviers dai autovalôrs de mecaniche struturâl. Considerìn une aste retilinie sutile di lungjece L, costituide di un materiâl elastic lineâr omogjeni e isotrop cun modul di Young costant E, $E > 0$, e densitât di masse costante γ, $\gamma > 0$. Lis vibrazions libaris de aste a son guviernadis de ecuazion diferenziâl

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right) - \gamma A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial^2 t} = 0, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \tag{1.1}$$

dulà che $A = A(x)$ e je la aree de sezion trasversâl e $w = w(x,t)$ al è il moviment longjitudinâl de sezion trasversâl di assisse x valutât al timp t. Si presum che la funzion $A = A(x)$ al sedi regolâr (ven a stâi, $C^2([0,L])$)

e stretementri positive in $[0, L]$. Si presum che lis sezions finâls de aste a sedin fissis, al vâl a dî

$$w(0, t) = 0 = w(L, t), \quad t \geq 0. \tag{1.2}$$

Se la aste e vibre cuntune frecuence ω e une forme spaziâl $X = X(x)$, ven a stâi $w(x, t) = X(x) \cos(\omega t)$, alore lis vibrazions libaris a son guviernadis dal probleme dal valôr limit

$$\begin{cases} (A(x)X'(x))' + \lambda A(x)X(x) = 0, & \text{in } (0, L), \\ X(0) = 0 = X(L), \end{cases} \begin{matrix} (1.3) \\ (1.4) \end{matrix}$$

dulà che $\lambda = \frac{E}{\gamma}\omega^2$ e $X \in C^2([0, L]) \setminus \{0\}$. Il numar (reâl) λ al è clamât autovalôr de aste e la funzion corispondente $X = X(x)$ e je la autofunzion associade a λ. La cubie $\{\lambda, X(x)\}$ e je une autocubie di Dirichlet. Par esempli, se $A(x) \equiv$ *costante* in $[0, L]$, alore $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ e $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$, $n \geq 1$.

O cjatìn convenient tornâ a scrivi il probleme (1.3)-(1.4) te forme canoniche di Sturm- Liouville, metint

$$y(x) = \sqrt{A(x)}X(x). \tag{1.5}$$

Duncje, la gnove autocubie $\{\lambda, y(x)\}$ e risôlf

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = q(x)y(x), & \text{in } (0, 1), \\ y(0) = 0 = y(1), \end{cases} \begin{matrix} (1.6) \\ (1.7) \end{matrix}$$

dulà che il potenziâl $q = q(x)$ al è definît tant che

$$q(x) = \frac{(\sqrt{A(x)})''}{\sqrt{A(x)}}, \quad \text{in } (0, 1), \tag{1.8}$$

e dulà che, par semplificâ la notazion, o vin assumût $L = 1$.

Il probleme *diret* dai autovalôrs al consist tal cjatâ i autovalôrs $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ e lis autofunzions $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ di (1.6)-(1.7) par un potenziâl $q = q(x)$ dât in $[0, 1]$ o, in maniere ecuivalente, par une sezion trasversâl dade $A = A(x)$ de aste. Al contrari, il probleme inviers dai autovalôrs al consist, par esempli, intal cjatâ informazions sul potenziâl $q = q(x)$ in $[0, 1]$ dât il spetri di Dirichlet $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ de aste.

Tal nestri esempli introdutîf o vin considerât i problemis inviers dai autovalôrs pal operadôr di $Ly = -y'' + qy$ suntun interval finît. Cheste classe di problemis inviers unidimensionâi di secont ordin e pues jessi considerade un argoment avonde consolidât te leterature dai problemis inviers dinamics. Contribûts fondamentâi a son stâts dâts in chest cjamp di Borg (1946); Levinson (1949); Marchenko (1950); Gel'fand and Levitan (1955); Hochstadt (1973); Hald (1978); McLaughlin (1988) e altris; si viodin i libris di Pöschel e Trubowitz (1987), Levitan (1987) e Gladwell (2004) par une presentazion complete.

L'obietîf di cheste note al è chel di presentâ une introduzion elementâr al probleme de unicitât par chescj problemis inviers daûr de metodiche di Borg. Inte tratazion, o vuei furnî lis ideis gjenerâls dai metodis invezit des provis rigorosis completis, che a puedin jessi cjatadis intai lavôrs origjinâi. La presentazion dai argoments e je cuasi autonome e i prerecuisîts a son la cognossince di base de analisi funzionâl (Brezis 1986; Friedman 1982) e de analisi complesse (Ahlfors 1984; Titchsmarsh, 1962).

Il scheme dal articul al è chest. Intal paragraf 2, a vegnin presentadis ciertis proprietâts gjenerâls dal probleme dai autovalôrs direts. La metodiche di Borg de unicitât pal probleme inviers dal autovalôrs e je descrite intal paragraf 3.

2. Proprietâts gjenerâls dal probleme diret dai autovalôrs.

2.1 Il probleme dai autovalôrs di Dirichlet. O scomencìn riclamant ciertis proprietâts di base dal probleme dai autovalôrs di Dirichlet (2.1)-(2.2)

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = q(x)y(x), \quad \text{in } (0,1), & (2.1) \\ y(0) = 0 = y(1), & (2.2) \end{cases}$$

par un potenziâl reâl q di cuadrât sumabil in $(0,1)$, ven a stâ $q \in L^2(0,1)$.

i) E esist une secuence di autovalôrs di Dirichlet $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. I autovalôrs a son numars reâi e $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.

ii) I autovalôrs a son sempliçs, o ben

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ... \tag{2.3}$$

e l'autospazi $\mathcal{U}_n$ associât al $n$esim autovalôr λ_n, $n \geq 1$, al è dât di

$$\mathcal{U}_n = \mathrm{span}\{g_n\}, \tag{2.4}$$

dulà che $g_n = g_n(x)$ e je la autofunzion autogjene associade a λ_n che e sodisfe la cundizion di normalizazion $\int_0^1 g_n^2(x)dx = 1$.

iii) La famee $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ e je une base ortonormâl dal spazi $\mathcal{D}$ des funzions continuis che a si anulin in $x = 0$ e $x = 1$, o ben:

$$\int_0^1 g_n(x)g_m(x)dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{if } n = m, \\ 0 & \text{if } n \neq m, \quad n, m \geq 1, \end{cases} \tag{2.5}$$

e par ogni $f \in \mathcal{D}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x), \quad \text{cun } c_n = \int_0^1 f(x)g_n(x)dx, \tag{2.6}$$

e converç in mût uniformi a f in $[0, 1]$.

Lis proprietâts parsore a puedin jessi dedotis de teorie spetrâl astrate pai operadôrs compats autozontâts in spazis di Hilbert, che si viodi Brezis (1986) e Friedman (1982). Une impostazion alternative si base su metodis di teorie des funzions e su proprietâts specifichis dai operadôrs di Sturm-Liouville, che si viodi Titchsmarsh (1962).

2.2 Stimis asintotichis des autocubiis. Come che o viodarìn intes prossimis sezions, il compuartament asintotic des autocubiis al zuie un rûl impuartant te teorie spetrâl invierse. Cun riferiment al probleme di Dirichlet (1.6)-(1.7), o calcolìn la soluzion $y = y(x, \lambda)$ dal probleme ai valôrs iniziâi

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = q(x)y(x), & \text{in } (0, 1), \quad (2.7) \\ y(0) = 0, & (2.8) \\ y'(0) = 1, & (2.9) \end{cases}$$

par cualchi numar (complès salacor) λ e par un potenziâl q (salacor di valôr complès) in $L^2(0, 1)$. Considerant la bande diestre come un tiermin di fuarce, y al pues jessi interpretât tant che il moviment di un ossiladôr armonic cun frecuence $\sqrt{\lambda}$. Duncje, su la base de rapresentazion di

Duhamel, la funzion y e je la soluzion de ecuazion integrâl lineâr di Volterra

$$y(x,\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-t)q(t)y(t)dt, \quad x \in [0,1]. \quad (2.10)$$

Si pues dimostrâ che e esist une soluzion uniche partignint a $C^1([0,1])$ di (2.10) ($y \in C^2([0,1])$ se q al è continui). Cun di plui, y e je une funzion interie di ordin $\frac{1}{2}$ in λ. O ricuardin che une funzion $f = f(\lambda)$ de variabile complesse λ e je une funzion analitiche se e à la derivative ogni volte che f e je definide. Se f e je analitiche in dut il plan, alore si dîs che f e je une funzion interie. Metìn $M(r) = \max_{|\lambda|=r}|f(\lambda)|$. Une funzion interie $f = f(\lambda)$ e à ordin s se s al è il numar plui piçul cussì che $M(r) \leq \exp(r^{s+\epsilon})$ par ogni $\epsilon > 0$, tant che $r \to \infty$. De (2.10) si pues ancje dedusi che $y(x,\lambda) \approx \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$ par $|\lambda|$ grant, precisementri

$$\left| y(x,\lambda) - \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right| \leq \frac{\|q\|_{L^2}}{|\lambda|} \exp\left(x(\|q\|_{L^2} + |Im\sqrt{\lambda}|) \right), \quad (2.11)$$

in mût uniformi in $[0,1]$, dulà che $\|q\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |q(x)|^2 dx\right)^{1/2}$, $\sqrt{\lambda} = Re\sqrt{\lambda} + iIm\sqrt{\lambda}$, $i = \sqrt{-1}$. I zeros di $y(1,\lambda) = 0$ a son i autovalôrs $\{\lambda_n\}$ dal probleme di Dirichlet (1.6)-(1.7) e, in chest câs, $y = y(x,\lambda_n)$ e je la autofunzion associade. Su la base de stime (2.11), si spietìn che i zeros di ordin âlt di $y(1,\lambda) = 0$ a sedin dongje dai zeros (al cuadrât) di $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, ven a stâ $\lambda_n \approx (n\pi)^2$ par $n \to \infty$. Di fat, cjapin il cercli $C_n = \{z \in \mathbb{C} |\ |z - n\pi| = \frac{\pi}{4}\}$ par n avonde grant. Si pues dimostrâ che al esist $N \in \mathbb{N}$ cussì che par ogni $n \geq N$ al esist precisementri un zero di $y(1,\lambda) = 0$ dentri dal cercli C_n, vâl a dî che cheste stime asintotiche dai autovalôrs e ten

$$|\sqrt{\lambda_n} - n\pi| < \frac{\pi}{4}. \quad (2.12)$$

La prove di (2.12) si base suntun risultât ben cognossût de analisi complesse: il Teoreme di Rouché, che si viodi Ahlfors (1984). Metìn che $f = f(z)$, $g = g(z)$ a sedin dôs funzions analitichis dentri di C_n e assumìn che $|f(z)| < |g(z)|$ su C_n. Alore, il Teoreme di Rouché al aferme che $g(z)$ e $g(z) + f(z)$ a àn esatementri il stes numar di zeros in C_n. Par aplicâ chest teoreme, tornìn a scrivi la funzion $y(1,\lambda)$ te forme

$$y(1,\lambda) = \underbrace{\left(y(1,\lambda) - \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \right)}_{\equiv f(\lambda)} + \underbrace{\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}}_{\equiv g(\lambda)} \tag{2.13}$$

Il pont delicât al consist tal dimostrâ che $|f(\lambda)| < |g(\lambda)|$ su C_n. Alore, visantsi che $g(\lambda)$ al à esatementri un zero $\sqrt{\tilde{\lambda}_n} = n\pi$ dentri di C_n, si oten la (2.12).

Cumò, metint la stime asintotiche dai autovalôrs (2.12) inte stime (2.11) o otignìn

$$y(x,\lambda_n) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{as } n \to \infty. \tag{2.14}$$

Visantsi che $g_n(x) = \frac{y(x,\lambda_n}{\|y(x,\lambda_n)\|_{L^2}}$ o otignìn la stime asintotiche

$$g_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2.15}$$

che e vâl in maniere uniforme sui sotinsiemis $[0,1] \times L^2(0,1)$ tant che $n \to \infty$. Infin, iterant la procedure che o vin viodût parsore, la stime dai autovalôrs (2.12) e pues jessi miorade par otignî

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + \int_0^1 q(x)dx - \int_0^1 \cos(2n\pi x)q(x)dx + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{as } n \to \infty. \tag{2.16}$$

O concludìn cheste sezion riclamant lis stimis asintotichis completis pes cundizions di contor di Dirichlet, di Robin e pes cundizions mischis. Metìn che α, $\gamma \in \mathbb{R}$ e notìn che o stin assumint che $n \geq 0$.

i) Cundizions di Dirichlet $y(0) = 0 = y(1)$:

$$\lambda_n = ((n+1)\pi)^2 + \int_0^1 q(x)dx - a_{2(n+1)}(q) + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2.17}$$

$$g_n(x) = \sqrt{2}\sin((n+1)\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2.18}$$

ii) Cundizions di Robin $\alpha y(0) + y'(0) = 0 = \gamma y(1) + y'(1)$:

$$\lambda_n = ((n)\pi)^2 + 2(\gamma - \alpha) + \int_0^1 q(x)dx + a_{2n}(q) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.19)$$

$$g_n(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.20)$$

iii) Cundizions mischis $y(0) = 0 = \gamma y(1) + y'(1)$:

$$\lambda_n = \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)^2 + 2\gamma + \int_0^1 q(x)dx + a_{2n+1}(q) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.21)$$

$$g_n(x) = \sqrt{2}\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.22)$$

Achì, $a_n \equiv \int_0^1 \cos(n\pi x)q(x)dx$ al è l'$n$esim coeficient di Fourier di q di tipo cosen, cun $\sum_{n\geq 0} a_n^2 < \infty$.

2.3 Numar di zeros des autofunzions: il câs di Dirichlet. O ripuartìn di seguit cualchi risultât ben cognossût.

Teoreme 2.1 :
La nesime autofunzion di Dirichlet, $n \geq 1$, e à esatementri $n - 1$ zeros (sempliçs) dentri dal interval $(0, 1)$.

Schiç de prove par $n = 1$. O lin daûr Weinberger (1965). De caraterizazion variazionâl dal autovalôr plui piçul o savìn che

$$\mu_1 = F(g_1) = \min_{\varphi \in H_0^1(0,1)\setminus\{0\}} F(\varphi), \quad \text{cun } F(\varphi) = \frac{\int_0^1 (\varphi'^2 + q\varphi^2)}{\int_0^1 \varphi^2} \quad (2.23)$$

al è *il cuozient di Rayleigh* dal probleme. Se g_1 e je la prime autofunzion, alore ancje $|g_1|$ e je une funzion associade al prin autovalôr. Di fat, $(|g_1|')^2 = (sgn(g_1)g_1')^2 = (g_1')^2$ e $F(|g_1|) = \mu_1$. Stant che la molteplicitât gjeometriche di ogni autovalôr di Dirichlet e je simpliçe, dôs autofunzions associadis al stes autovalôr a àn di jessi proporzionâls,o sedi $|g_1(x)| = cg_1(x)$ in $[0, 1]$, dulà che c e je une costant cun $|c| = 1$. Cumò, se $c = 1$ alore $g_1 \geq 0$ in $(0, 1)$ e, vicevierse, se $c = -1$ alore $g_1 \leq 0$ in $(0, 1)$. In ducj i doi i câs g_1 nol cambie segn in $[0, 1]$. Infin, se $g_1(\overline{x}) = 0$

par cualchi $\overline{x} \in (0,1)$, alore $g_1(\overline{x}) = g_1'(\overline{x}) = 0$, su la base de unicitât dal probleme di Cauchy pes soluzions dal operadôr di Sturm-Liouville, $g_1(x) \equiv 0$ in $[0,1]$, une contradizion.

Il risultât par $n \geq 2$ al pues jessi otignût par induzion e doprant lis proprietâts dal caratar di ossilazion des soluzions, che al è definît di chescj teoremis di Sturm.

Teoreme 2.2 :
Metìn che u e v a sedin dôs soluzions no banâi, cun valôrs reâi, di

$$u'' + g(x)u = 0, \quad in\ (a,b), \tag{2.24}$$

$$v'' + h(x)v = 0, \quad in\ (a,b), \tag{2.25}$$

dulà che g, $h \in L^2(a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$. *Se* $g < h$ *cuasi dapardut (c.d.) in* (a,b) *e* x_1, x_2 *a son doi zeros consecutîfs di* u *(par esempli,* $u(x_1) = u(x_2) = 0$, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$*), alore al esist* $\overline{x}$, $x_1 < \overline{x} < x_2$, *cussì che* $v(\overline{x}) = 0$.

Teoreme 2.3 :
Metìn che u e v a sedin, rispetivementri, dôs soluzions di (2.24), (2.25), *cussì che*

$$u(a)\cos\alpha + u'(a)\sin\alpha = 0, \quad v(a)\cos\alpha + v'(a)\sin\alpha = 0, \tag{2.26}$$

dulà che $\alpha \in \mathbb{R}$. *Metìn che a, b, g, h a sedin come parsore e metìn che m al sedi un numar intîr,* $m \geq 0$. *Se u al à m zeros in* $(a,b]$, *alore v al à al mancul m zeros in* $(a,b]$ *and l'nesim zero di v al è plui piçul dal nesim zero di u.*

3. Unicitât: metodiche di Borg.

3.1 Potenziâl simetric in L^2. Considerìn il probleme dai autovalôrs di Dirichlet

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = q(x)y(x), \quad \text{in } (0,1), & (3.1) \\ y(0) = 0 = y(1), & (3.2) \end{cases}$$

dulà che $q \in L^2(0,1)$ al è un potenziâl a valôrs reâi. Denotìn cun $\{g_n(x), \lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\int_0^1 g_n^2 dx = 1$, lis autocubiis di (3.1)-(3.2). Confrontìn i autovalôrs di ordin alt dal probleme parsore cun chei dal probleme di *riferiment* cun $q \equiv 0$:

$$\begin{cases} z''(x) + \chi z(x) = 0, \quad \text{in } (0,1), & (3.3) \\ z(0) = 0 = z(1). & (3.4) \end{cases}$$

O savìn che $\chi_n = (n\pi)^2$, $g_n(x,0) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$, $n \geq 1$. Duncje, su la base de stime asintotiche (2.16) o otignìn

$$\lambda_n = \chi_n + \int_0^1 q(x)dx - \int_0^1 \cos(2n\pi x)q(x)dx + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{par } n \to \infty. \tag{3.5}$$

In gjenerâl, si scuvierç che cognossi i autovalôrs di ordin alt al pues furnî informazions *dome* sul valôr medi di q e sui coeficients di Fourier di ordin superiôr di q valutâts su la famee $\{\cos(2n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$. Stant che la famee $\{\sqrt{2}\cos(2n\pi x)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{1\}$ e je une base ortonormâl dal spazi des funzions pâr rispiet a $x = \frac{1}{2}$

$$L^2_{even}(0,1) = \{f \in L^2(0,1) |\ f(x) = f(1-x) \text{ c.d. in } (0,1)\}, \tag{3.6}$$

si spietìn di podê rigjavâ informazions da $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ dome pe part pâr dal potenziâl q. Chestis considerazions euristichis a son stadis provadis in maniere rigorose in chest teoreme celebri di Borg (1946).

Teoreme 3.1:
Metìn che $q \in L^2_{even}(0,1)$. Il potenziâl q al è determinât in mût univoc dal spetri di Dirichlet complet $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

La prove e je par contradizion. Metìn che al esisti un altri potenziâl $p \in L^2_{even}(0,1)$, $p \neq q$, cussì che il probleme dai autovalôrs

$$\begin{cases} z''(x) + \lambda z(x) = p(x)z(x), \quad \text{in } (0,1), & (3.7) \\ z(0) = 0 = z(1), & (3.8) \end{cases}$$

al vedi esatementri i stes autovalôrs di (3.1)-(3.2), ven a stâ $\lambda_n(p) = \lambda_n(q)$ par ogni $n \geq 1$. Par semplificâ la notazion, o denotìn cun $g_n(q) = g_n(x,q)$, $g_n(p) = g_n(x,p)$ lis autofunzions di Dirichlet normalizadis associadis a λ_n pai potenziâi q e p, rispetivementri. Notìn che la $n$esime autofunzion di Dirichlet e je pâr cuant che n e je dispar e e je dispar cuant che n al è pâr. Moltiplicant la ecuazion diferenziâl sodisfate di $g_n(q)$, $g_n(p)$ par $g_n(p)$, $g_n(q)$, rispetivemtri, integrant par parts in $(0,1)$, o otignìn

$$\int_0^1 (q-p)g_n(p)g_n(q)dx = 0, \quad \text{par ogni } n \geq 1. \tag{3.9}$$

La prove di Borg e je sutîle e avonde complesse. Prime di imbarcjâsi inte prove rigorose, o furnìn une argomentazion euristiche.

Des formulis asintotichis des autofunzions normalizadis $g_n(p)$, $g_n(q)$ dal probleme di Dirichlet cun potenziâi $p \in L^2_{even}(0,1)$, $q \in L^2_{even}(0,1)$, o savìn, rispetivementri, che $g_n(x,p) = \sqrt{2}\sin(n\pi x) + O(1/n)$, $g_n(x,q) = \sqrt{2}\sin(n\pi x) + O(1/n)$ (achì, la prime autofunzion e corispuint $n = 1$). Duncje, doprant chestis formis asintotichis in (3.9) e trascurant i tiermins $O(1/n)$ si cjate

$$0 = 2\int_0^1 (q-p)\sin^2(n\pi x)dx = \int_0^1 (q-p)(1-\cos(2n\pi x))dx, \quad n = 1, 2, ... \tag{3.10}$$

Cjapant il limit par $n \to \infty$, o otignìn $\int_0^1 q = \int_0^1 p$ e duncje

$$\int_0^1 (q-p)\cos(2n\pi x)dx, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{3.11}$$

ven a stâ che ducj i coeficients di Fourier de funzion pâr $(q-p)$ a sparissin, in mût che $q = p$ cuasi dapardut in $(0, 1)$.

Tornìn cumò ae prove rigorose. Su la base dai autovalôrs stimâts cu la (2.16) o vin

$$\int_0^1 q dx = \int_0^1 p dx \tag{3.12}$$

e duncje la cundizion (3.9) e pues jessi scrite tant che

$$\int_0^1 (q-p)(1 - g_n(p)g_n(q))dx = 0, \quad \text{par ogni } n \geq 1. \tag{3.13}$$

Par cjatâ la contradizion al baste dimostrâ che la famee $\{1\} \cup \{1 - g_n(q)g_n(p)\}_{n=1}^{\infty}$ e je un sisteme *complet* di funzions in $L^2_{even}(0,1)$. In realtât, o dimostrarìn che cheste famee e je une base di $L^2_{even}(0,1)$. Si visìn che une secuence di vetôrs $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ intun spazi di Hilbert separabile H e je une base par H se al esist un spazi di Hilbert h di secuencis $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ cussì che la corispondence $\alpha \to \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ al è un isomorfisim lineâr tra h e H (ven a stâ un isomorfisim che al è continui e che al à un inviers continui).

O introdusìn l'insiemi di funzions $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ definît tant che

$$\begin{cases} U_0(x) = 1, & (3.14) \\ U_n(x) = \sqrt{2}\left(\int_0^1 g_n(q)g_n(p)dx - g_n(q)g_n(p)\right), \quad n \geq 1. & (3.15) \end{cases}$$

A clâr, $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ al è un sotinsiemi di $L^2_{even}(0,1)$. O dimostrarìn che $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ al è une base di $L^2_{even}(0,1)$. Chest al impliche daurman che ancje $\{1\} \cup \{g_n(q)g_n(p) - 1\}_{n=1}^{\infty}$ al è une base di $L^2_{even}(0,1)$.

A chest pont si avalìn di chest util risultât di analisi, che si viodi (Pöschel e Trubowitz 1987, Teoreme 3 de Apendîs D).

Teoreme 3.2:
Sedi $\{e_n\}_{n\geq 0}$ une base ortonormâl di un spazi di Hilbert H. Sedi $\{d_n\}_{n\geq 0}$ une secuence di elements di H. Se

i) $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ e je in mût che $\sum_{n=0}^{\infty} \|e_n - d_n\|_H^2 < +\infty$

e

ii) $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ e je linearmentri indipendente in H,

alore $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ e je une base di H.

Si visìn che une secuence $\{v_n\}$ intun spazi di Hilbert separabil H e je linearmentri indipendente se $\sum_n c_n v_n = 0$ par cualchi secuence $\{c_n\}$ cun $\sum_n c_n^2 < \infty$, alore $c_n = 0$ par dutis n. O aplichìn il teoreme achì parsore cun $H = L^2_{even}(0,1)$, $\{e_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\sqrt{2}\cos(2n\pi x)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{e_0 = 1\}$, $d_n = U_n$ par ogni $n \geq 0$.

La cundizion i) si pues verificâ cun facilitât. Su la base de stime asintotiche (2.15) o vin

$$U_n(x) = \sqrt{2}\cos(2n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{tant che } n \to \infty \tag{3.16}$$

e duncje

$$\sum_{n\geq 0} \|e_n - U_n\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right) < \infty. \tag{3.17}$$

La prove de indipendence lineâr indicade inte cundizion ii) e je è plui dificil. La idee origjinâl di Borg e jere chê di cjatâ une secuence di funzions $\{V_m\}_{m=0}^{\infty} \subset L^2_{even}(0,1)$ cussì che $\{U_n, V_m\}_{m,n=0}^{\infty}$ al è un sisteme di funzions bi-ortogonâl in $L^2_{even}(0,1)$, ven a stâ

$$\begin{cases} (U_n, V_n) = 1, \quad \text{par ogni } n \geq 0, & (3.18) \\ (U_n, V_m) = 0, \quad \text{par ogni } m, n \geq 0,\ n \neq m, & (3.19) \end{cases}$$

dulà che $(U_n, V_m) = \int_0^1 U_n(x)V_m(x)dx$. O sielzìn

$$\begin{cases} V_0(x) = 1, & (3.20) \\ V_m(x) = a'_m(x), \quad m \geq 1, & (3.21) \end{cases}$$

cun

$$a_m(x) = g_m(x,q)\zeta_m(x,p), \tag{3.22}$$

dulà che $\zeta_m = \zeta_m(x,p)$ e je une soluzion *specifiche* de ecuazion diferenziâl

$$\zeta''_m + \lambda_m\zeta_m = p\zeta_m, \quad \text{in } (0,1). \tag{3.23}$$

Si à di notâ che ζ_m no je une autofunzion di p stant che ζ_m nol sodisfe par necessitât lis cundizions di Dirichlet in corispondence di $x = 0$ e $x = 1$.

Par definizion, o vin

$$(U_0, V_0) = 1, \quad (U_0, V_n) = 0, \quad (U_n, V_0) = 0, \quad n \geq 1. \tag{3.24}$$

Metìn che $m, n \geq 1$. Stant che

$$(U_n, V_m) = -\sqrt{2}(g_n(q)g_n(p), a'_m) \tag{3.25}$$

e

$$(g_n(q)g_n(p), a'_m) = -((g_n(q)g_n(p))', a_m), \tag{3.26}$$

un calcul diret al mostre che

$$\begin{aligned}
((g_n(q)g_n(p))', a_m) &= \frac{1}{2}((g_n(q)g_n(p))', a_m) + \frac{1}{2}((g_n(q)g_n(p))', a_m) = \\
= \frac{1}{2}\int_0^1 (g_n(q)g_n(p))' g_m(q)\zeta_m(p) &- \frac{1}{2}\int_0^1 (g_n(q)g_n(p))(g_m(q)\zeta_m(p))' = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 g_m(q)\zeta_m(p)(g'_n(q)g_n(p) + g_n(q)g'_n(p)) - \\
&- g_n(q)g_n(p)(g'_m(q)\zeta_m(p) + g_m(q)\zeta'_m(p)) = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\zeta_m(p)g_n(p)\det\begin{pmatrix} g_m(q) & g_n(q) \\ g'_m(q) & g'_n(q) \end{pmatrix} + \right. \\
&\left. + g_m(q)g_n(q)\det\begin{pmatrix} \zeta_m(p) & g_n(p) \\ \zeta'_m(p) & g'_n(p) \end{pmatrix}\right] dx.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Se $m \neq n$, $m, n \geq 1$, alore

$$\left(\det\begin{pmatrix} g_m(q) & g_n(q) \\ g'_m(q) & g'_n(q) \end{pmatrix}\right)' = (\lambda_m - \lambda_n)g_m(q)g_n(q) \tag{3.28}$$

e

$$\left(\det \begin{pmatrix} \zeta_m(p) & g_n(p) \\ \zeta'_m(p) & g'_n(p) \end{pmatrix}\right)' = (\lambda_m - \lambda_n)\zeta_m(p) g_n(p). \tag{3.29}$$

Duncje o vin

$$\begin{aligned} &(\lambda_m - \lambda_n)((g_n(q)g_n(p))', a_m) = \\ &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} g_m(q) & g_n(q) \\ g'_m(q) & g'_n(q) \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \zeta_m(p) & g_n(p) \\ \zeta'_m(p) & g'_n(p) \end{pmatrix} \Bigg|_{x=0}^{x=1} = 0, \end{aligned} \tag{3.30}$$

dal moment che $g_m(x,q) = g_n(x,q) = 0$ in corispondence di $x = 0$ e $x = 1$. Chest al significhe che $(U_n, V_m) = 0$ par $m, n \geq 1$ e $m \neq n$.

Fasìn che $m = n$, $m, n \geq 1$. Si visìn che

$$\det \begin{pmatrix} \zeta_n(p) & g_n(p) \\ \zeta'_n(p) & g'_n(p) \end{pmatrix} \equiv \text{costante}, \quad \text{in } [0,1], \tag{3.31}$$

la cundizion di biortonormalitât

$$(U_n, V_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} \zeta_n(p) & g_n(p) \\ \zeta'_n(p) & g'_n(p) \end{pmatrix} = 1 \tag{3.32}$$

e je sodisfate se e dome se

$$\zeta_n(\frac{1}{2}, p) g'_n(\frac{1}{2}, p) - \zeta'_n(\frac{1}{2}, p) g_n(\frac{1}{2}, p) = \sqrt{2}. \tag{3.33}$$

La funzion ζ_n no je determinade in mût univoc de cundizion (3.33). O vin di imponi une seconde cundizion in $x = \frac{1}{2}$. Si visìn che cun n dispar la funzion $g_n(p)$ e je pâr rispiet a $x = \dfrac{1}{2}$ e $g'_n(\frac{1}{2}) = 0$. La funzion $\zeta_n(p)$ e pues jessi sielte in mût che

$$\zeta_n(\frac{1}{2}, p) = 0, \quad \zeta'_n(\frac{1}{2}, p) = -\frac{\sqrt{2}}{g_n(\frac{1}{2}, p)}. \tag{3.34}$$

Alore, la funzion $\zeta_n(p)$ e je dispar rispiet a $x = \frac{1}{2}$. Al contrari, se n e je pâr, $g_n(p)$ e je dispar e la funzion $\zeta_n(p)$ e pues jessi sielte in mût che

$$\zeta_n(\frac{1}{2}, p) = \frac{\sqrt{2}}{g'_n(\frac{1}{2}, p)}, \quad \zeta'_n(\frac{1}{2}, p) = 0, \tag{3.35}$$

ven a stâ che $\zeta_n(p)$ e je pâr rispiet a $x = \frac{1}{2}$.

In conclusion, cun n pâr, $g_n(p)$ e je dispar e $\zeta_n(p)$ e je pâr, e duncje la funzion $(g_n(p)\zeta_n(p))'$ e je pâr. Al stes mût, cuant che n al è dispar, $g_n(p)$ e je pâr e $\zeta_n(p)$ e je dispar, e duncje la funzion $(g_n(p)\zeta_n(p))'$ e je ancjemò pâr, e la costruzion de famee $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ e je complete.

Il metodi presentât parsore al pues jessi slargjât par cuvierzi il câs di cundizions al contor di Neumann. Considerìn il probleme dai autovalôrs

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = q(x)y(x), \quad \text{in } (0,1), & (3.36) \\ y'(0) = 0 = y'(1), & (3.37) \end{cases}$$

cun $q \in L^2(0,1)$ a valôrs reâi. Denotìn cun $\{\lambda_n, g_n\}_{n=0}^{\infty}$ lis autocubiis. Borg (1946) al à dimostrât il risultât di unicitât achì sot.

Teoreme 3.3:
Metìn $q \in L^2_{even}(0,1)$. Il potenziâl q al è determinât in mût univoc dal spetri di Neumann ridot $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Come tal câs di Dirichlet, il pont cruciâl al è dimostrâ che la famee $\{1\} \cup \{g_n(q)g_n(p)\}_{n=1}^{\infty}$ al è un sisteme complet di funzions di $L^2_{even}(0,1)$.

E vâl la pene notâ che il risultât di unicitât al è valit ancje cence cognossi l'autovalôr plui piçul λ_0. In realtât, l'autovalôr plui piçul al zuie un rûl speciâl in chest probleme inviers, come che al dimostre il teoreme di Borg (1946) chi sot.

Teoreme 3.4:
Che al sedi $q \in L^2(0,1)$ cun $\int_0^1 q = 0$. Se l'autovalôr plui piçul λ_0 dal probleme (3.36)-(3.37) al è zero, alore $q \equiv 0$ in $(0,1)$.

Di fat, o denotìn cun y_0 la autofunzion associade al autovalôr plui piçul λ_0. Pes proprietâts ossilatoriis des autofunzions di Neumann, y_0 nol si anule in $[0,1]$. Duncje, o podìn dividi la ecuazion diferenziâl (3.36) par y_0 e integrâ par parts in $(0,1)$:

$$0 = \int_0^1 q = \int_0^1 \frac{y_0''}{y_0} = \int_0^1 \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)' + \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2 = \int_0^1 \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2. \qquad (3.38)$$

De (3.38) o otignìn $y_0' \equiv 0$ in $[0,1]$ e duncje $q \equiv 0$ in $(0,1)$.

Note 3.5. Si à di notâ che i risultâts di unicitât otignûts parsore no puedin jessi slargjâts, in gjenerâl, al probleme di Sturm-Liouville cun cundizions al contor ancje lizermentri diferents come, par esempli,

$$\begin{cases} \alpha y(0) + y'(0) = 0, & (3.39) \\ \gamma y(1) + y'(1) = 0, & (3.40) \end{cases}$$

dulà che α, $\gamma \in \mathbb{R}$. Di fat, se $\alpha \neq 0$ e $\gamma \neq 0$, lis funzions analighis aes funzions U_n, V_n introdusudis parsore no son par necessitât simetrichis rispiet al pont $x = \frac{1}{2}$. Borg (1946) al à furnît un cuintri esempli dulà che il probleme dai autovalôrs cun cundizions al contor dal gjenar (3.39)-(3.40) nol puarte a un insiemi complet di funzions in $L^2_{even}(0,1)$.

3.2 Unicitât: potenziâl gjeneric in L^2. I risultâts di unicitât frontâts te sezion di prime a mostrin che l'insiemi di funzions $\{g_n(q)g_n(p)\}_{n=0}^{\infty}$ al è complet in $L^2_{even}(0,1)$, ven a stâ intun spazi di funzions che, apressapôc, al à la metât de dimension di dut il spazi $L^2(0,1)$. Par tratâ i potenziâi gjenerics in $L^2(0,1)$, la idee di Borg (1946) e je stade chê di associâ al probleme di Sturm-Liouville origjinâl un altri probleme di Sturm-Liouville, in mût che l'insiemi di funzions $\{g_n(q)g_n(p)\}_{n=0}^{\infty}$ dal probleme origjinâl intun cul insiemi di funzions $\{\overline{g}_n(q)\overline{g}_n(p)\}_{n=0}^{\infty}$ dal probleme associât a formin un insiemi complet di $L^2(0,1)$. In particolâr, lis cundizions al contor dal probleme associât a son sieltis in mût di produsi un compuartament spetrâl asintotic avonde diviers di chel dal probleme iniziâl.

Metìn che $q \in L^2(0,1)$ al sedi un potenziâl a valôrs reâi. Tant che esempli, o considerìn il probleme di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = q(x)y(x), \quad \text{in } (0,1), & (3.41) \\ y(0) = 0, & (3.42) \\ y(1) = 0 & (3.43) \end{cases}$$

e il probleme *associât* dai autovalôrs

$$\begin{cases} \overline{y}''(x) + \lambda \overline{y}(x) = q(x)\overline{y}(x), \quad \text{in } (0,1), & (3.44) \\ \overline{y}(0) = 0, & (3.45) \\ \gamma \overline{y}(1) + \overline{y}'(1) = 0, & (3.46) \end{cases}$$

dulà che $\gamma \in \mathbb{R}$.

Denotìn cun $\{\lambda_n(q), y_n(q) = y_n(x,q,\lambda_n(q))\}_{n=0}^{\infty}$ e cun $\{\overline{\lambda}_n(q), \overline{y}_n(q) = \overline{y}_n(x,q,\overline{\lambda}_n(q))\}_{n=0}^{\infty}$ lis autocubiis (cun autofunzions normalizadis) dal probleme dai autovalôrs (3.41)-(3.43) e (3.44)-(3.46), tal ordin. Introdusìn, cumò, i doi problemis di Sturm-Liouville leâts, tal ordin, a (3.41)-(3.43) e (3.44)-(3.46) cun potenziâl $p \in L^2(0,1)$, ven a stâ

$$\begin{cases} z''(x) + \lambda z(x) = p(x)z(x), \quad \text{in } (0,1), & (3.47) \\ z(0) = 0, & (3.48) \\ z(1) = 0 & (3.49) \end{cases}$$

e il so probleme *associât*

$$\begin{cases} \overline{z}''(x) + \lambda \overline{z}(x) = p(x)\overline{z}(x), \quad \text{in } (0,1), & (3.50) \\ \overline{z}(0) = 0, & (3.51) \\ \gamma \overline{z}(1) + \overline{z}'(1) = 0. & (3.52) \end{cases}$$

Metìn che $\{\lambda_n(p), z_n(p) = z_n(x,p,\lambda_n(p))\}$, $\{\overline{\lambda}_n(p), \overline{z}_n(p) = \overline{z}_n(x,p,\overline{\lambda}_n(p))\}$, $n = 0, 1, \ldots$, a sedin lis autocubiis (cun autofunzions normalizadis) dai problemis di autovalôrs (3.47)-(3.49) e (3.50)-(3.52), rispetivementri. Borg (1946) al à dimostrât chest risultât di unicitât par doi spetris.

Teoreme 3.4:
Metìn che q, $p \in L^2(0,1)$. Su la base de notazion achì parsore, se $\lambda_n(q) = \lambda_n(p)$ e $\overline{\lambda}_n(p) = \overline{\lambda}_n(q)$ par ogni $n \geq 0$, alore $p = q$.

La prove e seguìs lis liniis de prove corispondente pai potenziâi simetrics, ma, dal sigûr, e je plui complesse. Ancje in chest câs, o podìn presentâ un argoment euristic sempliç a poie dal risultât di unicitât. Par semplicitât, metìn che $\gamma = 0$ in (3.46) e in (3.52). Alore, imponint che i problemis di Sturm-Liouville (3.41)-(3.43), (3.47)-(3.49) e (3.44)-(3.46), (3.50)-(3.52) a vedin il stes spetri $\{\lambda_n\}$, $\{\overline{\lambda}_m\}$, o vin, rispetivementri:

$$\int_0^1 (q-p) y_n(q) z_n(p) dx = 0, \quad \int_0^1 (q-p) \overline{y}_m(q) \overline{z}_m(p) dx = 0, \quad (3.53)$$

par $n, m = 0, 1, 2, \ldots$. Doprant lis formulis asintotichis des autofunzions (2.18), (2.22) e trascurant i tiermins di ordin superiôr, par $n, m = 0, 1, 2, ...$ si cjate

$$\int_0^1 (q-p) \sin^2((n+1)\pi x) dx = 0, \quad \int_0^1 (q-p) \sin^2((m+\frac{1}{2})\pi x) dx = 0, \quad (3.54)$$

e di chest al seguìs che

$$\int_0^1 (q-p)(1-\cos(2(n+1)\pi x)) dx = 0, \quad \int_0^1 (q-p)(1-\cos((2m+1)\pi x) dx = 0, \quad (3.55)$$

par $n, m = 0, 1, 2, ...$, ven a stâ

$$\int_0^1 (q - p) \cos(k\pi x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{3.56}$$

Si che duncje, in ogni câs o vin $q = p$ in $(0, 1)$.

4. Conclusions. Un dai problemis principâi de teorie spetrâl invierse pai operadôrs di Sturm-Liouville in forme canoniche e je la determinazion univoche dal potenziâl. In cheste note o vin presentât la classiche impostazion di Borg par un potenziâl L^2 inprin simetric e daspò gjeneric suntun interval finît. Intune prossime note o presentarìn la impostazion alternative ae unicitât basade su argoments di teorie des funzions definîts inprin di Levinson (1949) e disvilupâts intun secont moment di Hochstadt (1973).