Gjornâl Furlan des Siencis **30.** 2020, 63-79

Risultâts resints su la identificazion di une crevadure vierte intune trâf par mieç di dâts minims di autofrecuencis

ANTONINO MORASSI*

Ristret. In chest contribût si presente une rassegne di cualchi risultât resint te identificazion di une crevadure vierte intune trâf elastiche retilinie cun profîl variabil regolâr, sedi sot vibrazion assiâl infinitesimâl sedi in flession plane, su la fonde de cognossince di une cubie di frecuencis adate. Si investighin lis cundizions suficientis pe identificazion univoche de crevadure e si presente un algoritmi costrutîf fondât sul Metodi des Curvis Lambda. Si discût ancje une gjeneralizazion dal metodi a lis astis cun profîl regolâr a dadis.

Peraulis clâf. Identificazion dal dam, crevaduris, frecuencis di risonance e di antirisonance, trâfs cun profîl variabil, problemis inviers.

1. Introduzion. La identificazion di crevaduris in elements monodimensionâi par mieç di dâts di autofrecuence al è un argoment che tai ultins trente agns al à riclamât cetant interès di bande de comunitât sientifiche. Par une panoramiche su lis tecnichis di analisi modâl pe individuzion di dams tes struturis, o fasìn riferiment, ai contribûts di Hearn & Testa (1991), Carden & Fanning (2004), Khoo et al. (2004), Humar et al. (2006).

* Dipartiment Politecnic di Inzegnarie e Architeture, Universitât dal Friûl, Udin, Italie. E-mail: antonino.morassi@uniud.it

La plui part dai lavôrs di ricercje a integnin la identificazion di crevaduris viertis in trâfs uniformis, si viodi, jenfri altris contribûts, Adams et al. (1978), Springer et al. (1988), Ruotolo & Surace (1997), Capecchi & Vestroni (2000), Cerri & Vestroni (2000), Vestroni & Capecchi (2000), Teughels et al. (2002), Gladwell (2004), Dilena & Morassi (2009), Rubio (2009), Pau et al. (2011), Greco & Pau (2012), e Caddemi & Caliò (2009, 2014) pe identificazion di crevaduris par mieç di dâts di frecuence e di spostament modâl. Lis trâfs cun sezion uniforme a permetin di esprimi la ecuazion di frecuence in forme sierade e cheste proprietât e rint il probleme inviers plui facil e plui gjestibil, sedi dal pont di viste teoric sedi dal pont di viste numeric. In dì di vuê, e je disponibile, in particolâr, une teorie avonde complete pe identificazion di une singule crevadure vierte in trâfs uniformis cuant che il dam al è piçul, ven a stâi cuant che il sisteme danezât al pues jessi considerât tant che une perturbazion di chel no danezât, si viodi Narkis (1994), Morassi (2001), Dilena & Morassi (2004). Sul ûs di frecuencis naturâls par identificâ un numar finît di piçulis crevaduris in trâfs e astis, il letôr al pues cjatâ une rassegne esaustive de leterature e un algoritmi ricostrutîf origjinâl tal interessant articul di Shifrin (2016).

Il probleme di determinâ une singule crevadure vierte e no necessariementri piçule intune aste che e vibre in direzion longjitudinâl doprant dâts di frecuence al è stât risolt di resint in Rubio et al. (2015a). La crevadure e je modelade cuntune suste longjitudinâl linearmentri elastiche metude te sezion danezade. Rubio et al. (2015a) a àn dimostrât che, cognossint la prime frecuence naturâl (positive) di une aste libare e la prime frecuence di antirisonance de funzion di rispueste in frecuence, valutade a une estremitât de aste, si determine in maniere univoche la posizion e la severitât de crevadure.

Pôcs a son i lavôrs di ricercje dedicâts a la identificazion di crevaduris no necessariementri piçulis in astis e trâfs no uniformis, si viodi, par esempli, Liang et al. (1992) e Chaudhari & Maiti (2000). In Rubio et al. (2015b), al ven introdusût il Metodi des Curvis Lambda tant che imprest util par formulâ e risolvi il probleme inviers in chest contest plui gjenerâl. Il Metodi des Curvis Lambda al è fondât soredut sul studi di cualchi proprietât rafinade des autofrecuencis intindudis tant che funzions de posizion e de severitât de crevadure e e permet di elaborâ un algoritmi costrutîf par risolvi il probleme diagnostic. In chest articul o presentìn une rassegne di cualchi risultât che o vin otignût di resint lant daûr di chest troi di ricercje e une estension dal metodi aes astis cun profîl regolâr a dadis che a vibrin in direzion assiâl. Il Metodi al è stât metût a la prove cuntune schirie ample di simulazions numerichis e la sô stabilitât rispiet ai erôrs e je stade verificade sedi par dâts disturbâts sedi par dâts sperimentâi. Par une informazion plui detaiade sui aspiets teorics e lis simulazions numerichis, si rimande il letôr interèssât ai contribûts di Rubio et al. (2015b, 2018, 2020).

2. Formulazion dal probleme inviers. Considerìn une aste sutile, libare, di lungjece L, che e vibre in direzion longjitudinâl. Denotìn cun $\widehat{A} = \widehat{A}(z)$ la aree da la sezion trasversâl de aste, $z \in [0, L]$ e assumìn che $\widehat{A}$ e sedi une funzion strentementri positive, diferenziabil in maniere continue in $[0, L]$. Il modul di Young (costant) dal materiâl al è denotât cun E, $E > 0$; γ e je la densitât di volum di masse (costante), $\gamma > 0$. La aste e à une singule crevadure te sezion de assisse z_d, cun $0 < z_d < L$. O prossumìn che, vie pe vibrazion, la crevadure e resti vierte e la modelìn tant che une suste elastiche longjitudinâl cun rigjiditât $\widehat{K}$, si viodi Freund & Herrmann (1976), Adams et al. (1978) e Cabib et al. (2001). Il valôr di $\widehat{K}$ al dipent de gjeometrie de sezion trasversâl crevade e da lis proprietâts dal materiâl de trâf. O fasìn riferiment a la sezion 5.2 par une espression specifiche tal câs di sezion retangolâr e crevadure trasversâl. La vibrazion longjitudinâl libare de aste, cun frecuence radiâl ω e amplece spaziâl $u = u(x)$, e je governade di chest probleme adimensionâl dai autovalôrs

$$\begin{cases} (au')' + \lambda a u = 0, \quad x \in (0, s) \cup (s, 1), & (2.1)\\ [[au'(s)]] = 0, & (2.2)\\ K[[u(s)]] = a(s)u'(s), & (2.3)\\ a(0)u'(0) = 0 = a(1)u'(1), & (2.4)\end{cases}$$

dulà che, par un dât $x_0 \in [0, 1]$, $x = \frac{z}{L}$, $s = \frac{z_d}{L}$ e

$$A(x) = \widehat{A}(z), \quad a(x) = \frac{A(x)}{A(x_0)}, \quad K = \frac{\widehat{K}L}{EA(x_0)} \in (0, \infty), \quad \lambda = \frac{\gamma L^2 \omega^2}{E}. \tag{2.5}$$

Cun di plui, o definìn $[[u(s)]] = (\lim_{x\to s^+} u(x) - \lim_{x\to s^-} u(x))$. Sot des ipotesis descritis parsore, e esist une secuence numerabile di autovalôrs reâi, no negatîfs, $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ di (2.1)–(2.4) cun pont di cumul in $+\infty$.

L'autovalôr plui bas $\lambda_0 = 0$ al corispuint a un moviment dal cuarp rigjit $u(x) = const$, e nol è sensibil al dam. A chest pont, o sin in stât di afermâ il nestri prin risultât. Par semplificâ la presentazion, o cjapìn in considerazion in particolâr une aste cun profîl simetric.

Proprietât 1. Assumìn che $a = a(x)$ e je une funzion strentementri positive e diferenziabil in maniere continue in $[0, 1]$, cun $a(x) = a(1-x)$. La misurazion des primis dôs frecuencis naturâls di (2.1)–(2.4) e permet la determinazion univoche de severitât K e de posizion s de crevadure, fin a la posizion simetriche $(1 - s)$. La procedure di identificazion e je costrutive.

3. Il Metodi des Curvis Lambda. Par provâ la Proprietât 1 doprant il Metodi des Curvis Lambda, nus covente cualchi risultât ausiliari. Prin di dut, o vin ritignût util formulâ il probleme di identificazion de crevadure tant che un probleme ecuivalent di chel de determinazion da la posizion e intensitât di un pont masse intune aste. La ecuivalence jenfri il probleme dai autovalôrs par une aste crevade (2.1)–(2.4) e il probleme dai autovalôrs par une aste che e vibre in direzion longjitudinâl e e puarte un pont masse te sezion trasversâl crevade e je chê seguitive. Denotìn cun (λ, u) une autocubie di (2.1)–(2.4). Se $\lambda > 0$, alore λ al è un autovalôr dal probleme.

$$\begin{cases} (bw')' + \lambda bw = 0, \quad x \in (0, s) \cup (s, 1), & (3.1) \\ [[w(s)]] = 0, & (3.2) \\ [[bw'(s)]] = -\lambda m w(s), & (3.3) \\ w(0) = 0 = w(1), & (3.4) \end{cases}$$

dulà che

$$w = au' \quad \text{in } (0, s) \cup (s, 1), \quad b = a^{-1} \quad \text{in } [0, 1], \quad m = K^{-1}. \qquad (3.5)$$

Di cuintri, se (λ, w) e je une autocubie dal probleme (3.1)–(3.4), alore λ, $\lambda > 0$, al è un autovalôr dal probleme (2.1)–(2.4) cun autofunzion u tâl che

$$u = bw' \quad \text{in } (0, s) \cup (s, 1), \quad a = b^{-1} \quad \text{in}(0, 1), \quad K = m^{-1}. \qquad (3.6)$$

Chi daûr, fondant il resonament su la ecuivalence jenfri i problemis ai autovalôrs (2.1)–(2.4) e (3.1)–(3.4), o tornìn a formulâ il nestri probleme inviers di determinâ une crevadure intune aste libare (simetriche),

che e vibre in direzion assiâl, tant che il probleme inviers par determinâ l'intensitât e la posizion di un pont masse intune aste (simetriche) supuartade in mût sempliç che e vibre in direzion assiâl.

Par studiâ il probleme diagnostic, o metarìn dispès a confront i autovalôrs dal probleme (3.1)–(3.4) par m finîts che no si smamissin $s \in (0,1)$, cun chei otignûts cjapant $m = 0$ in (3.1)–(3.4). O indicarìn cun (λ_n^U, w_n^U) la n-esime autocubie dal probleme no perturbât corispondent. De formulazion variazionâl e di Massim-Minim, si pues derivâ che $\lambda_{n-1}^U \leq \lambda_n \leq \lambda_n^U$, par ogni $n \geq 1$, dulà che o vin definît $\lambda_0^U = 0$.

Il nestri algoritmi di identificazion al è fondât su proprietâts cualitativis des funzions $\lambda_n = \lambda_n(s, \cdot)$ e $\lambda_n = \lambda_n(\cdot, m)$, ven a stâi, tal ordin, lis curvis λ-m and λ-s, dulà che λ_n al è un autovalôr di (3.1)–(3.4) par un coeficient dât b. Si pues dimostrâ che il studi di chestis proprietâts al dipent de espression esplicite des derivadis dai autovalôrs di prin ordin rispiet a m e s. Cun plui precision, assumìn che $(\lambda, w = w(x))$ al sedi une autocubie di (3.1)–(3.4). Alore, la funzion $\lambda = \lambda(s, m)$, par $s \in [0,1]$ e $m \in [0, \infty)$, e je une funzion continue cun derivadis parziâls continuis dal prin ordin e si à

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} = -\lambda \, \frac{m w(s)(w'(s^+) + w'(s^-))}{m w^2(s) + \int_0^1 b w^2}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial m} = -\lambda \, \frac{w^2(s)}{m w^2(s) + \int_0^1 b w^2}, \tag{3.7}$$

dulà che o vin definît lis dôs espressions
$w'(s^+) = \lim_{x_0 \to s^+} \left(\frac{dw(x;s,m)}{dx}|_{x=x_0} \right)$ e $w'(s^-) = \lim_{x_0 \to s^-} \left(\frac{dw(x;s,m)}{dx}|_{x=x_0} \right)$.

Esaminìn prime la dipendence dal autovalôr dal parametri m, par une posizion dade s dal pont masse. A son validis chestis proprietâts:

i) Se $w_n^U(s_0) = 0$ par cualchi $s_0 \in [0,1]$, alore $\lambda_n(s_0, m) = \lambda_n^U$ par ogni m positîf finît.

ii) Se $w_n^U(s_0) \neq 0$ par cualchi $s_0 \in (0,1)$, alore $\lambda_n = \lambda_n(s_0, m)$ e je une funzion decressinte in maniere monotone di m in $[0, \infty)$.

iii) Se $\lambda_n(s_0, m_0) = \lambda_n^U$ par cualchi $s_0 \in [0,1]$ e $m_0 \in (0, \infty)$, alore $w_n^U(s_0) = 0$.

iv) Se $w_n(s_0; s_0, m_0) = 0$ par cualchi $s_0 \in [0,1]$ e $m_0 \in (0, \infty)$, alore $w_n^U(s_0) = 0$.

Un risultât clâf al inten i ponts critics des curvis di λ-s. Il risultât al è esprimût culì dome pai prins doi autovalôrs di (3.1)–(3.4), stant che par identificâ il pont masse al sarà doprât dome chest insiemi di dâts spetrâi.

Dât m, $0 < m < \infty$. Alore $\lambda_1 = \lambda_1(s)$ e je une funzion strentementri decressinte $(0, 1/2)$, e al esist un unic $\widetilde{s} \in (0, 1/2)$, di mût che $\frac{\partial \lambda_2}{\partial s}(\widetilde{s}) = 0$, cussì che $\lambda_2 = \lambda_2(s)$ e je, tal ordin, une funzion strentementri decressinte in $(0, \widetilde{s})$ e une funzion strentementri cressinte in $(\widetilde{s}, 1/2)$. Ricuardìn che $\lambda_i(s) = \lambda_i(1-s)$ par $s \in [0, 1]$.

A chest pont, o sin in stât di presentâ l'algoritmi di identificazion. Chi daûr o ilustrìn i pas principâi de procedure costrutive. I dâts di partence $\{\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2\}$ a son sielzûts in mût che $0 < \overline{\lambda}_1 < \lambda_1^U, \quad \lambda_1^U \leq \overline{\lambda}_2 \leq \lambda_2^U$. Si à di notâ che il limit massim par $\overline{\lambda}_1$ al è stret, o ben il prin autovalôr al è simpri 'sensibil' al pont masse m. Se $\overline{\lambda}_2 = \lambda_2^U$, alore il pont masse al è posizionât in $s = 1/2$ e m al pues jessi determinât in maniere univoche risolvint la ecuazion $\overline{\lambda}_1 = \lambda_1(1/2, m)$. Sì che duncje, tal seguit o cjaparìn in considerazion la cundizion no banâl $\overline{\lambda}_2 < \lambda_2^U$e, par ipotesi simetriche, o assumìn $s \in (0, 1/2)$.

O tachìn cul determinâ i valôrs m_1^-, m_2^-, $0 < m_i^- < \infty$, $i = 1, 2$, dal parametri m in mût che $\overline{\lambda}_1 = \lambda_1(1/2, m_1^-)$, $\overline{\lambda}_2 = \lambda_2(s_{2min}, m_2^-)$, dulà che $s_{2min} \in (0, 1/2)$ al è il pont unic in maniere che $\frac{\partial \lambda_2(s, m_2^-)}{\partial s}|_{s=s_{2min}} = 0$. Si à di notâ che $m_1^- \neq m_2^-$ e $\max\{m_1^-, m_2^-\} < m$. O distinguìn doi câs.

Prin Câs . Se

$$\max\{m_1^-, m_2^-\} = m_1^-, \tag{3.8}$$

alore la curve $y = \lambda_2(s, m_1^-)$ e ven determinade in $[0, 1]$, si viodi la Figure 1 (part superiôr). Considerìn lis curvis $y = \lambda_2(s, \mathcal{M})$ par $\mathcal{M} > m_1^-$, $\mathcal{M}$ no masse grant. Denotìn cun $P_{2r}(\mathcal{M})$ il pont di intersezion jenfri $y = \lambda_2(s, \mathcal{M})$ e $y = \overline{\lambda}_2$, cun assisse $s(P_{2r}(\mathcal{M}))$ in mût che $s(P_{2r}(\mathcal{M})) > s_{2min}$. Po dopo, denotìn cun $P_1(\mathcal{M})$ il pont unic di intersezion jenfri $y = \lambda_1(s, \mathcal{M})$ e $y = \overline{\lambda}_1$, cun $s(P_1(\mathcal{M})) < 1/2$. Si pues cussì provâ che al esist un valôr unic di $\mathcal{M}$, che clamarìn $\widetilde{\mathcal{M}}$, di mût che $s(P_{2r}(\widetilde{\mathcal{M}})) = s(P_1(\widetilde{\mathcal{M}}))$. Il valôr $\widetilde{\mathcal{M}}$ al è la intensitât de masse m e $s = s(P_1(\widetilde{\mathcal{M}}))$ al è la sô posizion.

Secont Câs. Se

$$\max\{m_1^-, m_2^-\} = m_2^-, \tag{3.9}$$

o determinìn la curve $y = \lambda_1(s, m_2^-)$, denotant cun $P_1(m_2^-)$ il pont unic di intersezion jenfri $y = \lambda_1(s, m_2^-)$ e $y = \overline{\lambda}_1$, cun assisse $s_1 = s(P_1(m_2^-)) \in (0, 1/2)$. A chest pont, o distinguìn doi sot câs adizionâi. Câs 2.- a): Assumìn che $s_{2min} \leq s_1$. se $s_{2min} = s_1$, alore il probleme al è risolt. Se $s_{2min} < s_1$, o podìn ripeti la procedure benzà doprade tal

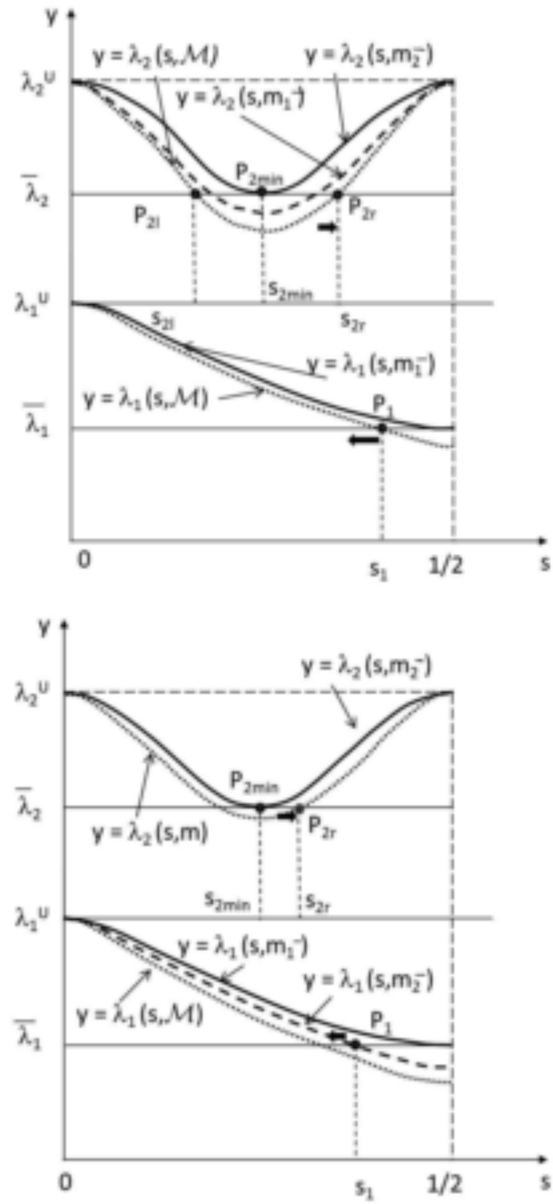

Figure 1: L'algoritmi di identificazion cul Metodi des Curvis Lambda fondât su lis primis dôs frecuencis di risonance: Câs 1 (parsore) e Câs 2 - Sotcâs (sot).

CÂS 1, e il probleme inviers al à une soluzion uniche, si viodi la Figure 1 (in bas). CÂS 2.- b): Se $s_{2min} > s_1$, alore al esist $m^* > m_2^-$ di mût che il pont di intersezion $P_{2l}(m^*)$ jenfri $y = \lambda_2(s, m^*)$ e $y = \overline{\lambda}_2$ al sodisfe $s(P_{2l}(m^*)) < s(P_1(m_2^-))$, dulà che $P_1(m_2^-)$ al è il pont unic di intersezion jenfri $y = \lambda_1(s, m_2^-)$ e $y = \overline{\lambda}_1$. Sbassant il valôr di masse di m^* a m_2^-, al esist un valôr unic, che clamarìn $\widetilde{\mathcal{M}}$, di mût che $s(P_{2l}(\widetilde{\mathcal{M}})) = s(P_1(\widetilde{\mathcal{M}}))$, e i parametris identificâts a son $m = \widetilde{\mathcal{M}}$ e $s = s(P_1(\widetilde{\mathcal{M}}))$.

4. Ûs di dâts di autofrecuencis di antirisonance. Une crevadure in un cualsisei pont di un insiemi di ponts simetrics di une struture simetriche e prodûs cambiaments identics tes frecuencis naturâls. Sì che duncje, come che o vin dimostrât te Sezion 3, la misurazion des primis dôs frecuencis naturâls (positivis) di une aste simetriche libare e determine la colocazion de crevadure fin a une posizion simetriche. Par eliminâ cheste indeterminatece intrinsiche dal probleme inviers, si pues doprâ te maniere adate la misurazion des frecuencis di antirisonance. Rinviant a Rubio et al. (2015b) par plui detais, si pues dimostrâ chest risultât.

Proprietât 2. Assumìn che $a = a(x)$ e je une funzion strentementri positive e diferenziabil in maniere continue in $[0, 1]$, cun $a(x) = a(1-x)$. La misurazion de prime frecuence naturâl positive di (2.1)–(2.4) e de prime antirisonance de funzion di rispueste in frecuence de aste valutade a une estremitât libare e permet la determinazion univoche de severitât K e de posizion s de crevadure. La procedure di identificazion e je costrutive.

Assumìn che $H(\sqrt{\lambda}, x_i, x_0)$ e sedi la funzion di rispueste in frecuence (FRF) de aste che e vibre in direzion assiâl in (2.1)–(2.4), dulà che x_i, x_o a son, tal ordin, la assisse dal pont di solecitazion e dal pont di misurazion. Cuant che $x_i = x_o = 0$, lis antirisonancis dal FRF $H(\sqrt{\lambda}, 0, 0)$ a son i autovalôrs (lidrîs cuadrade de) aste (2.1)–(2.4) cu la cundizion di Neumann $a(0)u'(0) = 0$ sostituide de cundizion di Dirichlet $u(0) = 0$. Sì che duncje, il pont principâl al è il studi des proprietâts cualitativis des curvis λ-m and λ-s pal probleme dai autovalôrs pe aste no supuartade crevade. La plui part des argomentazions dopradis par provâ la Proprietât 1 a puedin jessi riprodusudis, cu lis modifichis adatis, e la procedure di identificazion e pues jessi adatade al câs che o stin tratant. O fasìn riferiment dome al fat clâf che, par ogni severitât dade de crevadure, la prime antirisonance $\lambda_{1A} = \lambda_{1A}(s)$ e je une funzion strentementri cressinte tal interval $(0, 1)$. Al è propit il caratar ossilatori ridot di λ_{1A}, rispiet a la seconde frecuence naturâl de aste λ_2, che al permet di eliminâ la seconde soluzion causade de simetrie.

I risultâts precedents a puedin jessi gjeneralizâts a operadôrs di Sturm-Liouville plui gjenerâi di chei parsore. Considerìn, par esempli, la aste crevade in cundizion di estremitâts libaris che o vin introdusût al inizi de Sezion 2. Chi, a diference di chel che o vin ipotizât in precedence in (2.1)–(2.4), la rigjiditât assiâl $a = a(x)$ no je nessariementri proporzionâl a la densitât di masse $\rho = \rho(x)$ de aste, e la vibrazion e je regolade dal probleme dai autovalôrs

$$\begin{cases} (au')' + \lambda\rho u = 0, \quad x \in (0, s) \cup (s, 1), & (4.1) \\ [[au'(s)]] = 0, & (4.2) \\ K[[u(s)]] = a(s)u'(s), & (4.3) \\ a(0)u'(0) = 0 = a(1)u'(1). & (4.4) \end{cases}$$

Lis funzions $a(x)$ e $\rho(x)$ a son assumudis tant che funzions strentementri positivis e diferenziabilis in maniere continue, che a sodisfin lis cundizions di simetrie $a(x) = a(1-x)$ e $\rho(x) = \rho(1-x)$ in $[0, 1]$. La plui part dai pas de analisi parsore e pues jessi ripetude e si pues dimostrâ che lis Proprietâts 1 e 2 a valin ancje in chest câs.

5. Estension aes astis cun profîl regolâr a dadis.

5.1 Formulazion dal probleme e risultât principâl. I risultâts esponûts parsore a son stâts dimostrâts daûr de ipotesi che il profîl de aste al sedi regolâr (almancul continui e diferenziabil in maniere continue) e simetric rispiet al pont medi dal as de aste. Dimostrarìn di seguit che chestis dôs ipotesi a priori a puedin jessi eliminadis te dimostrazion de Proprietât 2.

Considerìn une aste sutîl drete libare che e vibre in direzion longjitudinâl di lungjece L. La aste e je fate di materiâl linearmentri elastic cun modul di Young costant E, $E > 0$, e e à densitât di volum di masse uniforme γ, $\gamma > 0$. Denotìn cun $\widehat{A} = \widehat{A}(z)$ la aree de sezion trasversâl de aste, cun $\widehat{A}(z) \geq \widehat{A}_0$ par $z \in [0, L]$, dulà che $\widehat{A}_0 > 0$ e je une costante. Assumìn che $\widehat{A} = \widehat{A}(z)$ e sedi *regolâr a dadis*-C^1in $[0, L]$, ven a stâi che, $\widehat{A}$ e la sô prime derivade $\widehat{A}'$ a son funzions continuis in $[0, L]$ cu la ecezion dai ponts $\{\widehat{\xi}\}_{i=1}^{N}$, $0 < \widehat{\xi}_1 < \widehat{\xi}_2 < ... < \widehat{\xi}_N < L$, dulà che i limits di çampe e di drete di $\widehat{A}$ e $\widehat{A}'$ a esistin e a son finîts:

$$lim_{z\to\widehat{\xi}_i^{\pm}}\widehat{A}(z)=\widehat{A}(\widehat{\xi}_i^{\pm}),\quad lim_{z\to\widehat{\xi}_i^{\pm}}\widehat{A}'(z)=\widehat{A}'(\widehat{\xi}_i^{\pm}),\tag{5.1}$$

$i=1,...,N$. La aste e à une singule crevadure te sezion trasversâl de assisse z_d, $0<z_d<L$. O prossumìn che la crevadure e resti vierte vie pe vibrazion e la modelìn tant che une suste elastiche longjitudinâl cun rigjiditât $\widehat{K}$.

La formulazion debile dal probleme dai autovalôrs, in forme adimensionâl, cun frecuence radiâl ω e amplece $\widehat{u}=\widehat{u}(z)$, e je chê che e seguìs par determinâ $(\lambda, u=u(x))$, $\lambda\in\mathbb{R}$ e $u\in H^1(0,s)\cup H^1(s,1)\setminus\{0\}$ di mût che

$$\int_0^1 au'\varphi'dx+K[[u(s)]]\cdot[[\varphi(s)]]=\lambda\int_0^1 au\varphi dx\tag{5.2}$$

par ogni $\varphi\in H^1(0,s)\cup H^1(s,1)$, dulà che $s=\frac{z_d}{L}\in(0,1)$,

$$K=\frac{\widehat{K}L}{EA(x_0)}\in(0,\infty),\quad \lambda=\frac{\gamma L^2\omega^2}{E},\quad \xi_i=\frac{\widehat{\xi}_i}{L},\quad i=1,...,N,\tag{5.3}$$

e $(\cdot)'=\frac{d(\cdot)}{dx}$ al significhe diferenziazion rispiet a x. Si à di notâ che, par $0=\xi_0<\xi_1<...<\xi_i\leq s\leq\xi_{i+1}<...<\xi_N<\xi_{N+1}=1$, il prin integrâl sul lât dal cjâf di çampe di (5.2) si intint tant che $\int_0^1(...)=\sum_{j=0}^{i-1}\int_{\xi j}^{\xi j+1}(...)+\int_{\xi i}^{s}(...)+\int_s^{\xi i+1}(...)+\sum_{j=i+1}^{N}\int_{\xi j}^{\xi j+1}(...)$. Daûr des ipotesis parsore, e esist une secuence numerabile di autovalôrs reâi, no negatîfs $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ di (5.2) di mût che $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n<...$ e $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$.

Cemût che o vin za fat, introdusìn lis frecuencis di antirisonance de FRF $H(\omega;0,0)$ de aste crevade valutade te sezion $x=0$. Chestis antirisonancis a son i autovalôrs λ_A dal probleme seguitîf: determinâ $(\lambda_A, u_A=u_A(x))$, $\lambda_A\in\mathbb{R}$ e $u_A\in H^1_{(0)}(0,s)\cup H^1(s,1)\setminus\{0\}$ in mût che

$$\int_0^1 au_A'\varphi'dx+K[[u_A(s)]]\cdot[[\varphi(s)]]=\lambda_A\int_0^1 au_A\varphi dx\tag{5.4}$$

par ogni $\varphi\in H^1_{(0)}(0,s)\cup H^1(s,1)$, dulà che $H^1_{(0)}(0,s)$ al è l'insiemi da lis funzions che a apartegnin a $H^1(0,s)$ e che si sfantin a $x=0$. Denotìn cun

$0 < \lambda_{1A} < \lambda_{2A} < ... < \lambda_{nA} < ...$ i autovalôrs di (5.4), cun $\lim_{n\to\infty} \lambda_{nA} = +\infty$.

A chest pont, o sin in stât di afermâ une gjeneralizazion de Proprietât 2.

Proprietât 3: La misurazion de prime frecuence naturâl (positive) λ_1 *of (5.2) e de prime frecuence di antirisonance* λ_{1A} *of (5.4) nus permet di determinâ in maniere univoche la posizion* s *e la severitât* K *di une singule crevadure vierte intune aste regolâr* C^1 *a dadis. La procedure di identificazion e je costrutive.*

La dimostrazion de Proprietât 3 e domande une cierte cuantitât di lavôr preliminâr, e la derivazion di cualchi strument matematic gnûf rispiet ae aste cun profîl regolâr. In curt, la dimostrazion si fonde su dôs proprietâts principâls. In prin lûc, cemût che o vin viodût prime, il probleme dai autovalôrs par une aste crevade cun profîl no regolâr al pues jessi formulât tant che un probleme ecuivalent par une aste che e vibre cuntun pont masse m $(= 1/K)$ te posizion s. In secont lûc, si pues dimostrâ che la curve λ_1-s o ben la funzion $\lambda_1 = \lambda_1(\cdot; m)$ che e esprim il compuartament de prime autofrecuenze (positive) de aste crevade libare rispiet a la variabil s par un valôr dât m, e à esatementri un pont critic - in efiets, un minim - dentri dal interval dal as de aste. Cun di plui, la funzion $\lambda_{1A} = \lambda_{1A}(s)$ e je strentementri cressinte in $[0, 1)$ e $\frac{\partial \lambda_{1A}}{\partial s}(0) > 0$. Si pues dimostrâ che chestis proprietâts a derivin de formulazion debile dal probleme dai autovalôrs, che, a diference dal metodi doprât in Rubio et al. (2015b) pes astis cun coeficients regolârs, e permet di incorporâ cun facilitât lis discontinuitâts dal profîl e e rint plui facil il studi de dipendence dai dâts di autofrecuence dai parametris di dam. Pai detais, o rimandìn i letôrs a Rubio et al. (2020).

5.2 Aplicazions. Par meti a la prove la eficacie di identificazion rispiet ai erôrs tai dâts, la procedure di ricostruzion e je stade aplicade a câs pseudo sperimentâi cun valôrs di frecuence disturbâts. Achi daûr, o presentìn e o comentìn une schirie selezionade di risultâts.

Si cjape a model une aste di açâr libare crevade cun sezion trasversâl retangolâr cun base $B = 0.02$ m (costante) e altece $H = H(z)$ dade di

$$H(z) = H_0 \left(\frac{1}{4} \left(\frac{z}{L} \right)^2 + 1 \right), \quad 0 \leq z < L_s, \tag{5.5}$$

$$H(z) = H_0 \left(\frac{1}{4} \left(\frac{z}{L} \right)^2 + \frac{5}{4} \right), \quad L_s < z \leq L, \tag{5.6}$$

dulà che $L = 1$ m, $L_s = 0.6$ m e $H_0 = 0.02$ m. Il modul di Young e il rapuart di Poisson dal materiâl a son, tal ordin, $E = 207$ GPa e $\nu = 0.3$. La aste e à dôs crevaduris simetrichis trasversâls, ognidune cun front paralêl al lât B e ognidune di profonditât $\frac{d}{2} = 4.12$ mm ($\widehat{K} = 1.4276 \times 10^{10}$ N/m) posizionadis a $z_d = 0.35$ m dal cjaveç di çampe.

I risultâts de identificazion dal dam pai dâts perturbâts $(f_1)_{meas} = (1 \pm k_1)(f_1)_{exact}$ e $(f_{1A})_{meas} = (1 \pm k_2)(f_{1A})_{exact}$ si viodin te Tabele 1 ($k_1 = 6 \times 10^{-4}$, $k_2 = 9 \times 10^{-4}$) e te Tabele 2 ($k_1 = 2.5 \times 10^{-4}$, $k_2 = 4 \times 10^{-4}$). Si furnìs une stime de profonditât de crevadure, otignude de rigjiditât stimade $\widehat{K}_{est}$ par mieç des ecuazions (5.7) e (5.8). Daspò di vê identificât la rigjiditât $\widehat{K}$ e la posizion de crevadure s, al è pussibil determinâ la profonditât de crevadure doprant la relazion esplicite jenfri la profonditât de crevadure e la rigjiditât K. Tal câs che o stin esaminant, se o denotìn cun $\frac{d}{2}$ la profonditât de crevadure di ogni lât, la rigjiditât $\widehat{K}$ de suste elastiche che e simule il dam e je esprimude tant che

$$\widehat{K} = \frac{E\widehat{A}(z_d)}{L\delta_l(\nu;\alpha)}, \tag{5.7}$$

dulà che (si viodi Ruotolo & Surace (2004))

$$\delta_l(\nu;\alpha) = 2\frac{H(z_d)}{L}(1-\nu^2)(0.7314\alpha^8 - 1.0368\alpha^7 + 0.5803\alpha^6 + \\ + 1.2055\alpha^5 - 1.0368\alpha^4 + 0.2381\alpha^3 + 0.9852\alpha^2) \tag{5.8}$$

e $\alpha = \frac{d}{H(z_d)}$ al è il rapuart di crevadure. Sì che duncje, dai valôrs identificâts di $\widehat{K}$ e s, cognossint $\frac{H(z_d)}{L}$, al è pussibil, in prin lûc, determinâ $\delta_l(\nu;\alpha)$ e, po dopo, la profonditât de crevadure d par mieç de inversion de ecuazion (5.8) rispiet a α. Pai valôrs usuâi di ν (e.g., $\nu \simeq 0.3$), la funzion $\delta_l = \delta_l(\nu;\cdot)$ e pues jessi simpri invertide in maniere univoche tal interval $\alpha \in [0,1]$, ancje se la espression (5.8) di solit e je acurade intun interval inferiôr.

La analisi des Tabelis 1–2 e mostre che la procedure di identificazion e je sensibile ai erôrs sui dâts, ancje se lis discrepancis te stime de profonditât de crevadure a son plui bassis in maniere significative rispiet a chês che a corispuindin ae prevision di rigjiditât, stant che a son sot dal 5 par cent par ducj i doi i campions, ogni volte che si assum il nivel di erôr inferiôr. Cheste

Table 1: Identificazion de posizion z_d, severitât $\widehat{K}$ e profonditât d di une crevadure te aste paraboliche discontinue libare aes estremitâts di ecuazion (5.6), par mieç de prime frecuence naturâl (positive) e la prime frecuence di aniriso-nance di $H(\omega; 0, 0)$. Câs pseudo sperimentâl. Nivel di erôrs tes frecuencis misuradis: $k_1 = 6.0 \times 10^{-4}$ e $k_2 = 9.0 \times 10^{-4}$. Percentuâl di erôr: $e_K = 100 \times (\widehat{K}_{est} - \widehat{K})/\widehat{K}$, $e_z = 100 \times (z_{d,est} - z_d)/z_d$, $e_d = 100 \times (d_{est} - d)/d$.

Câs		f_1 (Hz)	f_{1A} (Hz)	$z_{d,est}$ (m)	e_z	$\widehat{K}_{est}$ (10^{10} N/m)	e_K	d_{est} (mm)	e_d
No danezât		2506.10	1151.12						
Danezât	No erôrs	2493.67	1146.05	0.3496	-0.10	1.4258	-0.12	8.24	0.06
$P1$	$(1+k_1)(f_1)_{exact}$ $(1+k_2)(f_{1A})_{exact}$	2495.16	1147.08	0.3716	6.17	1.7379	21.74	7.49	-8.98
$P2$	$(1-k_1)(f_1)_{exact}$ $(1-k_2)(f_{1A})_{exact}$	2492.17	1145.02	0.3357	-4.08	1.2104	-15.21	8.91	8.22
$P3$	$(1+k_1)(f_1)_{exact}$ $(1-k_2)(f_{1A})_{exact}$	2495.16	1145.02	0.2929	-16.30	1.2817	-10.22	8.61	4.53
$P4$	$(1-k_1)(f_1)_{exact}$ $(1+k_2)(f_{1A})_{exact}$	2492.17	1147.08	0.4296	22.74	1.5571	9.07	8.00	-2.78

diferente sensibilitât e je dade de relazion no lineâr (5.8) jenfri la rigjiditât $\widehat{K}$ e la profonditât de crevadure. Dut câs, si à di notâ ancje che la cuantitât di erôr assolût che o vin considerât sui dâts di frecuence (par esempli, $1-2$ Hz su valôr di frecuence tal interval di 1200 a 2500 Hz) e corispuint a une grandece resonevule tes aplicazions concretis. Si spietisi che chest erôr assolût al puedi jessi ridusût ancjemò, miorant, tal stes timp, sedi la procedure sperimentâl sedi la elaborazion analitiche dai dâts otignûts intun test di vibrazion.

6. Trâfs in vibrazion flessionâl. In cheste sezion o cjapìn in esam, in curt, la identificazion di une singule crevadure vierte intune trâf in vibrazion flessionâl, cun profîl variabil, cul Metodi des Curvis Lambda. Par une esposizion plui precise dai risultâts e dai detais des provis, il letôr interèssât al pues fâ riferiment a Rubio et al. (2018).

O assumìn che la crevadure si verifichi te sezion trasversâl di assisse z_d, cun $0 < z_d < L$, dulà che L e je la lungjece di une trâf in cundizion di supuart sempliç ai doi cjaveçs. O assumìn ancje che la crevadure e resti vierte vie pe vibrazion e che e sedi modelade tant che une suste rotazionâl linearmentri elastiche cence masse, cun rigjiditât $\widehat{K}$, si viodi Freund & Herrmann (1976). La vibrazion flessionâl libare de trâf cun frecuence radiâl ω e amplece $u = u(x)$ ($x = z/L$, $z \in [0, L]$) e je regolade di chest probleme dai autovalôrs (scrit in forme adimensionâl)

$$\begin{cases} (ju'')'' - \lambda\rho u = 0, \quad \text{in } (0,s) \cup (s,1), & (6.1)\\ u(x) = u''(x) = 0, \quad \text{in } x = 0 \text{ e } x = 1, & (6.2)\\ [[u(s)]] = [[(ju'')(s)]] = [[(ju'')'(s)]] = 0, & (6.3)\\ K[[u'(s)]] = j(s)u''(s), & (6.4)\end{cases}$$

dulà che $s = z_d/L$, $s \in (0,1)$, $K = \widehat{K}L/EI_0$, $K \in (0,\infty)$, $\lambda = L^4\omega^2/EI_0$ e $I_0 = CL^4$, cun $C > 0$ une costante assolude. Culì, $\rho = \rho(x)$ e je la densitât di masse par unitât di lungjece, e $j = j(x)$ al è il secont moment (adimensionâl) de aree intor dal as traviers dal centroit de sezion trasversâl, a scuare rispiet al plan di vibrazion (l'as neutri). O assumìn che $j(x)$ e $\rho(x)$ a sedin funzions regolârs positivis in $[0,1]$, e a sedin simetrichis rispiet al baricentri dal as de trâf.

Il studi dal probleme inviers al va daûr des stessis liniis de analisi corispondente pal probleme des vibrazions assiâls, ancje se cun diferencis significativis. La analisi si fonde su trê passaçs principâi. In prin lûc, si dimostre che il probleme dai autovalôrs pe trâf crevade (6.1)–(6.4) al pues jessi trasformât intun probleme dai autovalôrs ecuivalent par une trâf cun supuart sempliç che e puarte un pont masse $m = 1/K$ te sezion trasversâl crevade s, cun coeficients adats di rigjiditât flessionâl e densitât di masse. Sì che duncje, come tal câs de vibrazion assiâl, il probleme di rilevazion de crevadure al è trasformât tal probleme ecuivalent di determinâ la posizion s e la grandece m di un pont masse di

Table 2: Identificazion de posizion z_d, severitât $\widehat{K}$ e profonditât d di une crevadure intune aste paraboliche discontinue libare di ecuazion (5.6), par mieç de prime frecuence naturâl (positive) e la prime frecuence di antirisonance di $H(\omega;0,0)$. Câs pseudo-sperimentâl. Nivel di erôr tes frecuencis misuradis: $k_1 = 2.5 \times 10^{-4}$ e $k_2 = 4.0 \times 10^{-4}$. Percentuâl di erôr: $e_K = 100 \times (\widehat{K}_{est} - \widehat{K})/\widehat{K}$, $e_z = 100 \times (z_{d,est} - z_d)/z_d$, $e_d = 100 \times (d_{est} - d)/d$.

Câs		f_1 (Hz)	f_{1A} (Hz)	$z_{d,est}$ (m)	e_z	$\widehat{K}_{est}$ (10^{10} N/m)	e_K	d_{est} (mm)	e_d
No danezât		2506.10	1151.12						
Danezât	No erôrs	2493.67	1146.05	0.3496	-0.10	1.4258	-0.12	8.24	0.06
$P1$	$(1+k_1)(f_1)_{exact}$ $(1+k_2)(f_{1A})_{exact}$	2494.29	1146.51	0.3587	2.50	1.5472	8.38	7.92	-3.77
$P2$	$(1-k_1)(f_1)_{exact}$ $(1-k_2)(f_{1A})_{exact}$	2493.04	1145.59	0.3423	-2.20	1.3230	-7.33	8.54	3.70
$P3$	$(1+k_1)(f_1)_{exact}$ $(1-k_2)(f_{1A})_{exact}$	2494.29	1145.59	0.3230	-7.71	1.3587	-4.82	8.40	2.02
$P4$	$(1-k_1)(f_1)_{exact}$ $(1+k_2)(f_{1A})_{exact}$	2493.04	1146.51	0.3803	8.65	1.4909	4.44	8.10	-1.61

une cubie adate di autofrecuencis. Tal secont passaç o studiìn lis curvis lambda di tip $\lambda - m$ e $\lambda - s$. La analisi si fonde ancjemò su la determinazion esplicite des derivadis dai autovalôrs rispiet ai parametris s e m e su lis proprietâts specifichis des cubiis dai autovalôrs de trâf crevade. Daûr di une assunzion tecniche a priori sui zeris di une cierte funzion, determinade tai tiermins de funzion dai autovalôrs dal probleme, lis proprietâts descritis parsore a vegnin dopradis tal tierç e ultin passaç par definî l'algoritmi costrutîf dal Metodi des Curvis Lambda par risolvi il probleme inviers. Plui precisementri, si dimostre che l'analic de Proprietât 1 dal câs assiâl al è vêr, o ben la crevadure e pues jessi identificade in maniere univoche fin a une posizion simetriche, cognossint lis primis dôs frecuencis naturâls de trâf.

Par completece, o sierìn cheste sezion fasint cualchi osservazion su lis diferencis tecnichis che o vin cjatât in cheste analisi e tal studi dal probleme inviers analic di individuâ une singule crevadure vierte intune aste in vibrazion longjitudinâl cun profîl variabil che o vin cosiderât te Sezion 3. Un prin intric al è colegât al studi des proprietâts cualitativis des autofunzions de trâf crevade, tant che il numar di zeris e lis proprietâts de trame jenfri i zeris des autofunzions e lis lôr derivadis. Chest studi al pues jessi puartât indenant tal contest assiâl, slargjant lis tecnichis classichis di Sturm-Liouville, che si doprin par une aste no danezade, a une aste crevade. I metodis di Sturm-Liouville no si puedin aplicâ cun facilitât ai operadôrs di cuart ordin e, duncje, o sin stâts obleâts a sielzi un metodi diferent, fondât principalmentri sul studi dal caratar ossilatori de funzion statiche di Green de trâf fressurade. Un secont ostacul al è leât al studi dal compuartament cualitatîf des curvis λ–s. Si pues dimostrâ che il resonament doprât pal câs di secont ordin no si apliche al câs di cuart ordin. La tecniche che o vin adotât achì e je divierse e si fonde essenzialmentri su un argoment di deformazion che nus à permetût di ridusi la analisi al studi dai zeris di une funzion adate definide su la configurazion no danezade. Al è precisementri a chest pont che, par aplicâ l'argoment di deformazion, o vin introdusût une assunzion tecniche a priori sui zeris di une cierte funzion, determinade in tiermins di autofunzions, de trâf crevade. Si pues dimostrâ che cheste assunzion e je, in efiets, une proprietât dal probleme tal câs di dam piçul (Rubio et al. , 2018). Cun di plui, par mieç di un metodi diferent, al è stât dimostrât che cheste cundizion e pues jessi lassade fûr cuant che la trâf a supuart sempliç e je *unifor*me, cence introdusi nissune restrizion a la severitât dal dam (Rubio et al. , 2016). Se cheste cundizion e puedi o no jessi gjavade in maniere definitive da la analisi dal probleme inviers e reste, par cumò, e par nô, une cuistion vierte.

7. Conclusions Chest contribût al à presentât une rassegne di risultâts resints sul probleme inviers di identificâ une singule crevadure vierte intune trâf in vibrazion par mieç di dâts minims di frecuencis naturâls e frecuencis di antirisonance. La trâf e je cjapade in considerazion cun profîi variabii e la severitât de crevadure no je necessariemenntri piçule. A son stadis stabilidis cundizions suficientis in tiermins di dâts di frecuence pe identidìficazion univoche de posizion e de severitât de crevadure par trâfs in vibrazion assiâl o flessionâl. La analisi e puarte a un algoritmi costrutîf di identificazion dal dam, clamât Metodi des Curvis Lambda.

Jenfri lis estensions pussibilis di chescj risultâts, si puedin elencâ il probleme viert di identificâ une singule crevadure in trâfs a plui campadis o in telârs a un plan e la individuazion di crevaduris multiplis. Dut câs al va notât che cualchidun dai imprescj matematics che o vin doprât te analisi di une singule trâf cuntune singule crevadure a puedin no jessi diretementri gjeneralizabii a chescj altris câs e al è probabil che par frontâ chescj problemis inviers impegnatîfs si vedi di cjatâ gnovis ideis.