

Identificazion di massis concentradis in nanorisonadôrs

MICHELE DILENA*, MARTA FEDELE DELL'OSTE*,
JOSÉ FERNÁNDEZ-SÁEZ**,
ANTONINO MORASSI* & RAMÓN ZAERA**

Ristret. In chest lavôr si cjape in rassegne une schirie di risultâts otignûts di resint tal cjamp dai problemis inviers di identificazion de masse tes nanotrâfs par mieç de misurazion des frecuencis di risonance. La nanotrâf e je modelade tal rispiet de teorie dal gradient di deformazion, daûr des ipotesis cinetichis di Euler-Bernoulli. Te prime part dal contribût, si trate de individuazion di un piçul pont masse singul intune nanotrâf uniforme supuartade ai doi cjaveçs. La linearizazion dal probleme inviers dongje dal sisteme referenziâl e permet di stabilî che la cognossince dai cambiaments des primis dôs frecuencis di risonance e permet di determinâ in maniere univoche la intensitât de masse e la posizion de masse fin a une posizion simetriche. Si derivin espressions in forme sierade pe posizion e intensitât de masse zontade. Te seconde part dal contribût, il metodi al ven aplicât a la identificazion di doi piçui ponts masse zontâts a une nanotrâf uniforme poiade ai doi cjaveçs, doprant i cambiaments tes primis cuatri frecuencis di risonance.

Peraulis clâf. Sensôrs nanorisonadôrs, ponts masse, identificazion, problemis inviers.

1. Introduzion. Tai ultins agns, la necessitât tai sistemis industriâi e biologjics di misurâ proprietâts fisichis e chimichis in scjale submicroniche e à fat cressi la atenzion e l'interès sui nanosensôrs. Lis dimensions ridotis di chescj

* Dipartiment Politecnic di Ingegnerie e Architetture, Universitât dal Friûl, Udin, Italie.

E-mail: antonino.morassi@uniud.it

** Dipartiment di Mecaniche Continue e Analisi Struturâl, Universidad Carlos III de Madrid, Spagne.

trasduttori a un quartile al disvilup di gnûfs concets di rilevament e a un miglioramento des prestazions cuntun grant impat su cetantis aplicazions (Voiculescu and Zaghloul, 2015; Lim, 2011). Un dai esemplis plui rappresentatîfs dai vantaçs de riduzion di scjale tai sistemis di rilevament al è il risonadôr nanomecanic, che al consist intune strutture vibrante cun prestazions une vore buinis tal rilevament di piçulis massis aderentis che a produsin piçulis variazions tes frecuencis di risonance dal sisteme (Wang and Arash, 2014). Il *principi di rilevazion de masse* par chescj sistemis al dopre lis variazions des frecuencis di risonance causadis di massis adizionâls no cognossudis tacadis su la superficie dal sensôr tant che dâts par ricostruî la variazion de masse.

Derivât des tecnichis di microscopie a fuarce atomiche, il sensôr basât su nanotrâfs al è un dai plui comuns jenfri i sistemis doprâts pal rilevament de masse. Fin dal inizi, lis nanotrâfs a son stadis dopradis par rilevâ particulis di dimensions microscopichis (Braun et al., 2005), celulis, sporis di foncs (Gfeller et al., 2005), moleculis di DNA (Datar et al., 2009) e parfin atoms (Jensen et al., 2008). Studis resints a un esplorât la pussibilitât di doprâ pai rilevaments risonadôrs bidimensionâi, tant che nanomenbranis e nanoplachis, si viodi, par esempli, Alava et al. (2010), Bhaswara et al. (2014) e Fernández-Sáez et al. (2019).

Une carateristiche clâf des nanostruturis e je la necessitât di tignî cont dai efets de dimension quant che si elaborin modei de lôr rispueste mecaniche, par vie che lis lôr dimensions a diventin comparabilis a lis distancis microstruturâls carateristichis. A chest fin, i modei continuis gjeneralizâts a rivin a caturâ sei i efets de microstrutture sei i efets de dimension (Kröner, 1963; Toupin, 1963; Green and Rivlin, 1964; Mindlin, 1964). Jenfri lis variis teoriis dal gradient di deformazion, chê proponude in Lam et al. (2003) (cognossude tant che *teorie dal gradient di deformazion modificât*) e risalte tant che alternative interessante par superâ lis dificoltâts associadis ae suaze di elasticitât dal dut no locâl, si viodi Romano et al. (2017), e e je stade doprade di divers autôrs par analizâ la rispueste mecaniche di diversis tipologjîs di nanostruturis.

No cate aplicazions impuartantis tai cjamps de fisiche, de chimiche e de biologie, lis ricercjîs teorichis disponibilis sul probleme inviers di rilevâ massis adizionâls tai nanorisonadôrs a son pocjîs. Doprant la teorie dal gradient di deformazion modificât, Morassi et al. (2017) a un analizât pe prime volte la vibrazion assiâl di une nanotrâf uniforme cuntune singule masse di piçule entitât tacade e a un proponût un metodi di identificazion par determinâ la intensitât e la posizion de masse fondât suntune metodiche di perturbazion dai autovalôrs. In Morassi et al. (2019) i risultâts otignûts a son stâts estindûts ae vibrazion flessionâl di nanotrâfs uniformis cuntun piçul pont masse tacât. Fondantsi su la espression esplicite des variazions des autofrequencis causadis dal pont masse, a son stadis otignudis espressions sieradis sedi de posizion sedi de intensitât dal pont masse tes cundizions di cjaveçs supuartâts.

Tes Sezions 2 e 3 di cheste note si cjàpìn in rassegne cualchidun dai risultâts otignûts in Morassi et al. (2019). Te Sezion 4, si gjeneralize la analisi a la identificazion, par mieç di dâts minims di frecuence di risonance, di doi piçui ponts masse intune nanotrâf uniforme supuartade.

2. Identificazion di un piçul pont masse intune nanotrâf par mieç di dôs frecuencis di risonance.

Introdusarìn il nestri probleme inviers in tiermins matematics. Assumint la ipotesis cinetiche de teorie de trâf di Euler-Bernoulli e lavorant te suaze de teorie dal gradient di deformazion modificât proponude di Kong et al. (2009), la amplece spaziâl $u = u(x)$ de vibrazion trasversâl cun frecuence radiâl $\sqrt{\lambda}$ de nanotrâf uniforme di riferiment e je reglade de ecuazion

$$Su^{IV} - KU^{VI} = \lambda \rho u, \quad \text{in}(0, L), \quad (2.1)$$

dulà che L e je la lungjece de nanotrâf e ρ e je la masse par unitât di lungjece. I coeficients S e K a son dâts di

$$S = EI + 2GA l_0^2 + \frac{120}{225}GA l_1^2 + GA l_2^2, \quad K = I \left(2Gl_0^2 + \frac{4}{5}Gl_1^2 \right), \quad (2.2)$$

dulà che G al è il modul di tai, E il modul di Young, I il secont moment de aree, ν il rapuart di Poisson, e l_0, l_1, l_2 a son lis costantis materiâls adizionâls che a coventin par completâ il model; si viodi Akgoz and Civalek (2011). Si à di notâ che cuant che $l_i = 0$, $i = 0, 1, 2$, cheste formulazion e coincît cun chê classiche.

In chest studi si ocupìn di nanotrâfs supuartadis, o ben di nanotrâfs che a ducj i doi i cjaveçs a vedin tant che cundizions al contor in $x = 0$ e in $x = L$:

$$u(x) = 0, \quad -Su''(x) + Ku^{IV}(x) = 0, \quad u''(x) = 0. \quad (2.3)$$

Lis autocubiis di (2.1), (2.3) a àn cheste espression in forme sierade:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^6 \left[\frac{K}{\rho} + \frac{S}{\rho} \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2} \right], \quad (2.4)$$

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad n \geq 1. \quad (2.5)$$

Prossumìn che la nanotrâf e vedi un pont masse tacât di intensitât $M > 0$ al pont di assisse $x = s$, $0 < s < L$. Il corispondent probleme dai autovalôrs

perturbâts al consist tal determinâ la cubie di autovalôrs $\{\tilde{\lambda}, \tilde{u}(x)\}$ soluzion di

$$\left\{ \begin{array}{l} S\tilde{u}^{IV} - K\tilde{u}^{VI} = \tilde{\lambda}\rho\tilde{u}, \quad \text{in}(0, s) \cup (s, L), \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}''(0) = 0, \\ (-S\tilde{u}'' + K\tilde{u}^{IV})(0) = 0, \\ [[\tilde{u}(s)]] = 0, \\ [[\tilde{u}'(s)]] = 0, \\ [[\tilde{u}''(s)]] = 0, \\ [(-S\tilde{u}''' + K\tilde{u}^V)(s)] = -\tilde{\lambda}M\tilde{u}(s), \\ [(-S\tilde{u}'' + K\tilde{u}^{IV})(s)] = 0, \\ [K\tilde{u}'''(s)] = 0, \\ (-S\tilde{u}'' + K\tilde{u}^{IV})(L) = 0, \\ \tilde{u}(L) = \tilde{u}''(L) = 0. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Achì, $[[f(s)]] \equiv (f(s^+) - f(s^-)) = \lim_{x \rightarrow s^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow s^-} f(x)$.

Prossumìn che la masse adizionâl e sedi piçule rispjet a la masse totâl de nan-otrâf, par esempi, $M \ll \rho L$. Dai risultâts classics al risulte che l' n -esim autovalôr $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n(M)$ al è une funzion C^1 in $[0, \infty)$ de masse M , e la derivade prime e à la espression esplicite

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_n}{\partial M} = -\tilde{\lambda}_n \frac{\tilde{u}_n^2(s)}{M\tilde{u}_n^2(s) + \int_0^L \rho \tilde{u}_n^2}. \quad (2.7)$$

Daûr di (2.7), la apossimazion di prin ordin dal n -esim autovalôr perturbât rispjet a M e je

$$\tilde{\lambda}_n(M) = \lambda_n - \lambda_n u_n^2(s)M, \quad (2.8)$$

dulà che e ven cjapade in considerazion la cundizion di normalizazion de masse $\int_0^L \rho u_n^2 = 1$. Se o sostituìn lis espressions (2.4), (2.5) in (2.8), o otignìn

$$C_n^S = M \sin^2 \left(\frac{n\pi s}{L} \right), \quad (2.9)$$

cun

$$C_n^S = -\frac{(\tilde{\lambda}_n - \lambda_n)}{\lambda_n} \frac{\rho L}{2}, \quad n \geq 1. \quad (2.10)$$

La espression (2.9) e mostre che la identificazion dal pont masse e pues jessi otignude doprant i cambiaments intune cubie specifiche di frecuencis di risonance, ven a stâi chei che a corispuindin ae n -esime e $2n$ -esime cubie di frecuencis, par $n \geq 1$. Di fat, se $C_n^S > 0$, alore si pues rigjavâ chestis espressions in forme sierade pe intensitât e posizion de masse:

$$M = \frac{C_n^S}{1 - \frac{C_{2n}^S}{4C_n^S}}, \quad (2.11)$$

$$\cos\left(\frac{2n\pi s}{L}\right) = \frac{C_{2n}^S}{2C_n^S} - 1. \quad (2.12)$$

Al contrari, se $C_n^S = 0$ par cierts $n \geq 2$, alore il pont masse si cjate intun dai ponts nodâi dal n -esim mût di vibrazion. In chest câs la intensitât di masse e reste indeterminade.

Par finî, al vâl la pene notâ che la misure dai prins doi spostaments de frecuence di risonance e determine in maniere univoche la posizion dal pont di masse fin a la simetrie rispjet a $x = L/2$.

3. Aplicazions. In cheste sezion, o valutarin la finece de metodiche de perturbazion tal stimâ lis primis dôs frecuencis naturâls de nanotrâf supuartade. Cun di plui, o aplicarin il metodi di rilevament che o vin descrit parsore cun $n = 1$ par identificâ sedi la posizion sedi la intensitât dal pont masse.

Al fin ilustratîf, proprietâts gjeometriche e materiâl de nanotrâf a son cjapâts tant che in Kong et al. (2009). O prossumìn che la nanotrâf e vedi une sezion trasversâl retangolâr ecuivalente, cun spessôr $h = 50 \mu\text{m}$, largjece $b = 2h$, lungjece $L = 20h$, modul di Young $E = 1.44 \text{ GPa}$, e rapuart di Poisson $\nu = 0.38$. I trê parametris de scjale di lungjece a son assumûts compagns, par esempli, $l_i = 17.6 \mu\text{m}$, $i = 0, 1, 2$.

La finece de metodiche perturbative e je testade comparant i valôrs des cubiis di frecuencis, determinâts cjatant la soluzion esate dal probleme (2.6), e i lôr valôrs apossimatîfs otignûts par mieç de soluzion perturbative (2.8). I risultâts par valôrs diviers di h/l e par posizions diviersis s/L dal pont masse (normalizade a la masse totâl ρL) a son delineadis tes Figuris 1 e 2.

I risultâts numerics a mostrin che la finece de stime perturbative de frecuence e je pluitost uniforme rispjet al fatôr di scjale l , al mancual tal interval di valôrs considerâts. In gjenerâl, plui piçule e je la ampece $u_n(s)$, miôr e je la precision. In particolâr, la difference massime jenfri il valôr esat e chel de frecuence di risonance dal prin ordin si cjate a $s/L = 0.50$ e $s/L = 0.25$, tal ordin pal prin e il secont mût. Lis deviazions massimis a son, tal ordin, cirche 1, 4, 9 % (prin mût) e 1, 5, 11 % (secont mût) par $M/(\rho L) = 0.05, 0.10, 0.15$.

Tal aplicâ il metodi di identificazion, i spostaments di frecuence a son stâts valutâts par mieç de risoluzion esate dal probleme dai autovalôrs in configurazion referenziâl e perturbade. Lis simulazions a son stadis puartadis indenand doprant dâts cence rumôr, si ben che une apossimazion intrinseche e je ancjemò presinte par vie dal çoncjament di prin ordin (2.8) te serie di Taylor dai autovalôrs. La Figure 3 e mostre i risultâts cu la variazion continue de posizion s/L dal pont masse drenti dal interval $[0, 1/2]$ e l'ûs di valôrs selezionâts de intensitât di masse normalizade $M/(\rho L) = 0.010, 0.025, 0.050, 0.100, 0.150, 0.200$. Chescj valôrs a corispuindin in maniere apossimade a variazions massimis relativis $\delta\lambda_n/\lambda_n$ a ecuivalin a 2, 5, 9, 17, 23, 29% e 2, 5, 9, 16, 22, 26% par $n = 1$ e $n = 2$, tal ordin. L'erôr massim su la posizion de masse al è sù par jù 5%

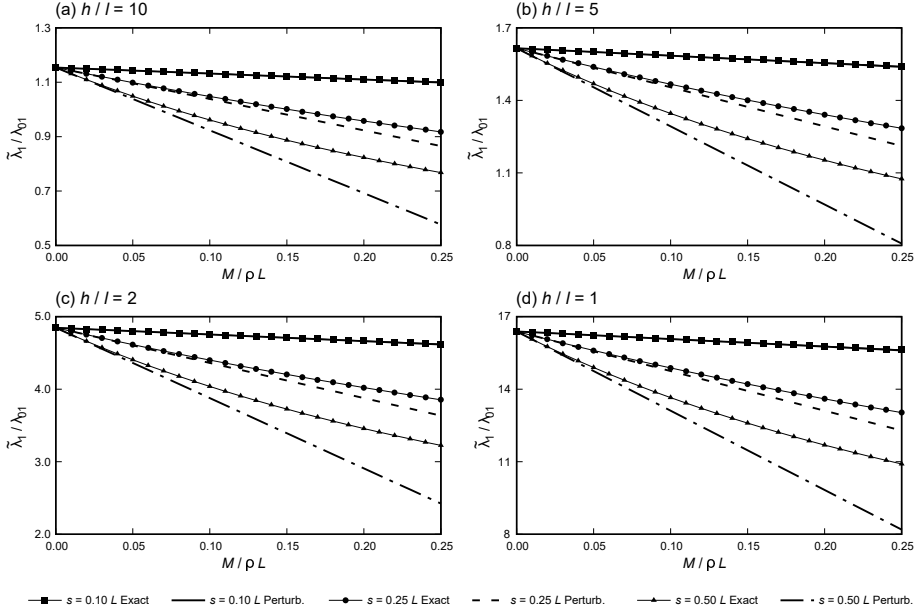


Figure 1: Prin autovalôr normalizât rispjet al pont masse adimensionâl, par diversis pozitions di masse e diviers valôrs dal parametri di scjale di lungjece.

par $M/(\rho L) = 0.200$, e lis stimis a restin acuradis ancje par valôrs di masse elevâts. La determinazion de intensitât de masse e je mancual acurade, cun erôrs che a rivin fin a 15 – 30% e 40 – 50% par $M/(\rho L) = 0.050 – 0.100$ e $M/(\rho L) = 0.150 – 0.200$, tal ordin.

4. Identificazion di doi ponts masse. La analisi disvilupade te sezion precedente e pues jessi estindude a la identificazion di doi piçui ponts masse (s_1, M_1) , (s_2, M_2) , tacâts a une nanotrâf uniforme supuartade, dai cambiaments tes primis cuatri frecuencis di risonance, dulà che $0 < s_1 < s_2 < L$ e $M_i \ll \rho L$, $i = 1, 2$.

Lis vibrations trasversâls libaris de nanotrâf perturbade a sodisfin il probleme (2.6), dulà che la ecuazion diferenziâl e vâl in $(0, s_1) \cup (s_1, s_2) \cup (s_2, L)$ e lis cundizions di salt a tegnin tes sezions $x = s_1$ e $x = s_2$. Procedint come che al è stât fat te sezion 2 e cu la notazion fate parsore, il cambiament di prin ordin dal n -esim autovalôr al è dât di

$$C_n^S = M_1 \sin^2 \left(\frac{n\pi s_1}{L} \right) + M_2 \sin^2 \left(\frac{n\pi s_2}{L} \right), \quad (4.1)$$

dulà che C_n^S al è definît come in (2.10), $n \geq 1$.

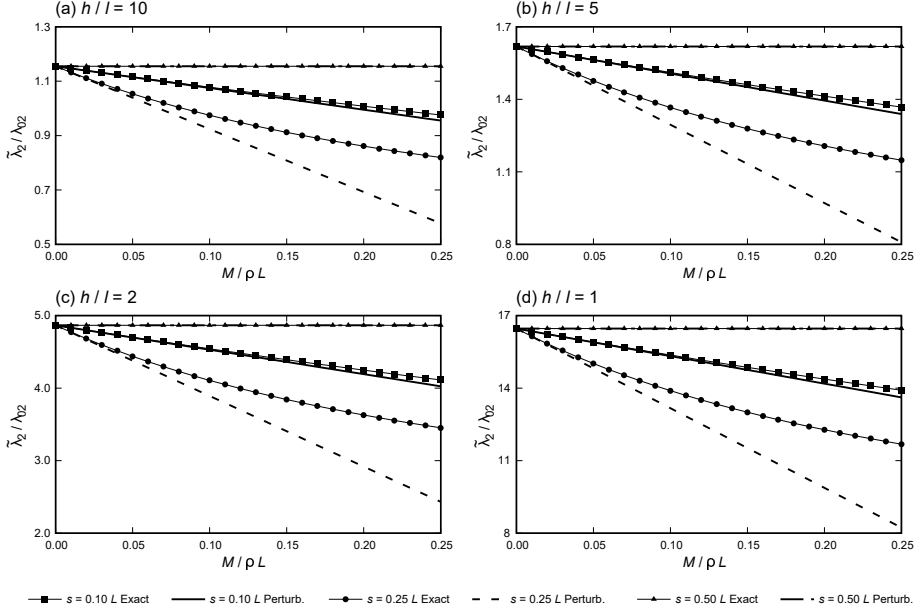


Figure 2: Secont autovalôr normalizât rispjet al pont masse adimensionâl, par diversis posizions di masse e diviers valôrs dal parametri di scjale di lungjece.

Pe simetrie dal sisteme no perturbât, lis configurazions $\{(s_1, M_1), (s_2, M_2)\}$, $\{(L - s_1, M_1), (L - s_2, M_2)\}$, $\{(L - s_1, M_1), (s_2, M_2)\}$, $\{(s_1, M_1), (L - s_2, M_2)\}$ no puedin jessi distintis dai dâts des frecuencis di risonance. Tignint cont di cheste no unicitât intrinsiche dal probleme, nol è restritîf assumi

$$0 < s_1 < s_2 \leq \frac{L}{2}. \quad (4.2)$$

O formulìn, cumò, il probleme inviers in tiermins di variazions tes primis cuatri frecuencis naturâls. Se o scrivìn (4.1) par $n = 1, 2, 3, 4$, o otignìn il sisteme seguitif di ecuazions no lineârs di risolti rispjet ai cuatri parametris (s_1, M_1) , (s_2, M_2) :

$$\begin{cases} M_1 \sin^2 \frac{\pi s_1}{L} + M_2 \sin^2 \frac{\pi s_2}{L} = C_1^S, \\ M_1 \sin^2 \frac{2\pi s_1}{L} + M_2 \sin^2 \frac{2\pi s_2}{L} = C_2^S, \\ M_1 \sin^2 \frac{3\pi s_1}{L} + M_2 \sin^2 \frac{3\pi s_2}{L} = C_3^S, \\ M_1 \sin^2 \frac{4\pi s_1}{L} + M_2 \sin^2 \frac{4\pi s_2}{L} = C_4^S, \end{cases} \quad (4.3)$$

dulà che

$$C_i^S > 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad C_4^S \geq 0. \quad (4.4)$$

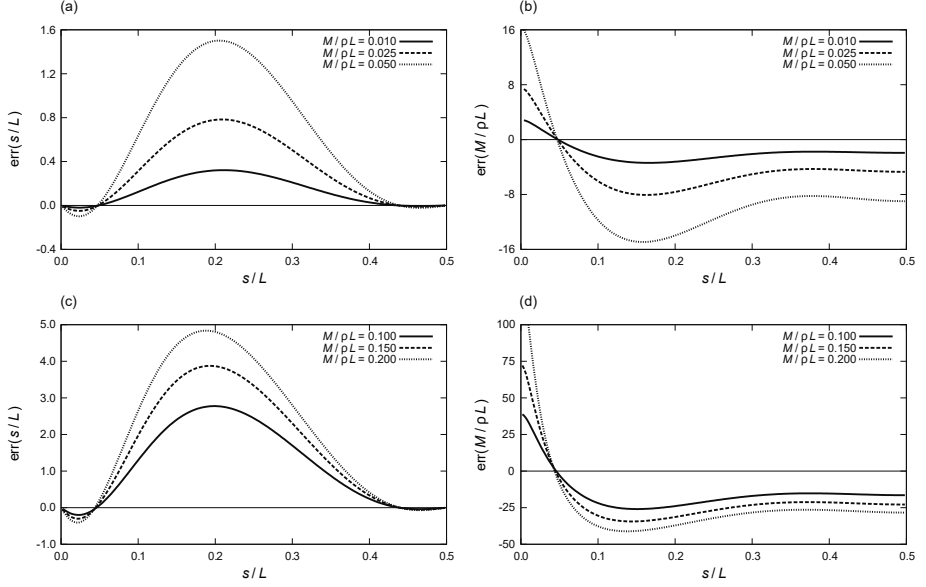


Figure 3: Identificazion par mieç des variazions des primis dôs frecuencis propriis par diviers valôrs dal pont masse. Colone a man çampe: erôrs percentuâi su la posizion de masse, $err(s) = 100 \times (s_{ident} - s_{exact})/L$. Colone a man drete: erôrs percentuâi su la intensità di masse, $err(M/(\rho L)) = 100 \times (M_{ident} - M_{exact})/M_{exact}$.

Il sisteme (4.3) al à la stesse struture dal sisteme (13)–(16) introdusût in Rubio et al. (2016) pe identificazion di dôs fressuris viertis di gravità diverse intune tràf (classiche) te cundizion che i doi cjaveçs a sedin supuartâts semplicementri. Sì che duncje, si puedin adatâ i resonaments formulâts in Rubio et al. (2016) e cjatâ la soluzion esplicite dal sisteme no lineâr (4.3). Lassant in bande i details e rimandant il letôr interessât al lavôr citât, achì si limitisi a riclamâ il risultât principâl: la cognossince des primis cuatri frecuencis naturâls e permet di determinâ in maniere univoche la intensità e la posizion dai doi ponts masse, fin a la simetrie rispiet a la sezion centrâl de nanotrâf. Al è relevant che si puedi otignî espressions di forme sierade in tiermins di dâts di frequence naturâl sedi pes posizions sedi pes intensitàs de masse.

In curt, o delinein i resonaments plui impuartants che si puedin doprâ par provâ i risultâts descrits parsore. Il câs particulâr dulà che $C_4^S = 0$ al è semplic. Se C_4^S al sparìs,alore $s_1 = \frac{L}{4}$ e $s_2 = \frac{L}{2}$, e si oten facilmentri

$$M_1 = C_2^S, \quad M_2 = \frac{2C_1^S - C_2^S}{2}. \quad (4.5)$$

Par discuti dal câs gjenerâl, al è util introdusi chestis *variabilis di posizion*

$$x = x(s_1) = \cos \frac{2\pi s_1}{L} \in [-1, 1), \quad y = y(s_2) = \cos \frac{2\pi s_2}{L} \in [-1, 1). \quad (4.6)$$

Si à di notâ che par $s \in (0, L/2]$ la funzion $f(s) = \cos(\frac{2\pi s}{L})$ e je une corrispondence un a un jenfri l'interval $(0, L/2]$ e l'interval $[-1, 1)$. Si che duncje, se o rivin a cjatâ lis dôs variabilis $\{x, y\}$,alore o rivin a determinâ in maniere univoche lis posizions $\{s_1, s_2\}$ des dôs massis.

Daûr des argomentazions mostradis in Rubio et al. (2016), la variabil di posizion x e risulte jessi la lidrîs de ecuazion polinomiâl di secont ordin

$$x^2 - Sx + P = 0, \quad (4.7)$$

dulà che i numars reâi $S = x + y$ e $P = xy$ a puedin jessi determinâts doprant une espression di forme sierade dai dàts C_i^S , $i = 1, \dots, 4$. Denotìn cun

$$x_{\mp} = \frac{S \mp \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \quad (4.8)$$

lis dôs lidrîs (4.7), dulà che la notazion x_- , x_+ e corrispuint, tal ordin, al segn $-$ e al segn $+$ de bande di man drete di (4.8). Cun di plui, ancje lis variabilis di posizion y_- , y_+ a corrispuindin, tal ordin, a la soluzion x_- , x_+ , e a puedin jessi determinadis in maniere esplicite. Se o denotìn cun (x, y) une des dôs soluzions (x_-, y_-) , (x_+, y_+) , chestis espressions di forme sierade a valin pes intensitâts di masse:

$$M_1 = \frac{C_2 - 2C_1(1 + y)}{(1 - x)(x - y)}, \quad (4.9)$$

$$M_2 = \frac{C_2 - 2C_1(1 + x)}{(1 - y)(y - x)}. \quad (4.10)$$

In conclusion, l'insiemi complet di soluzions par (4.3) al è dât di

$$\{(s_{1-}, M_{1-}), (s_{2-}, M_{2-})\}, \quad \{(s_{1+}, M_{1+}), (s_{2+}, M_{2+})\}, \quad (4.11)$$

dulà che (M_{1-}, M_{2-}) , (M_{1+}, M_{2+}) a son valutâts, tal ordin, di (4.9) cun $(x = x_-, y = y_-)$ e di (4.10) cun $(x = x_+, y = y_+)$. Lis posizions di masse $s_{i\mp}$, $i = 1, 2$, si cjatin cul invertî la funzion $\cos \frac{2\pi s}{L}$ su $(0, L/2]$.

Tal ultin, se si ten cont che $y_- = x_+$, $y_+ = x_-$ e che $M_{1+} = M_{2-}$, $M_{2+} = M_{1-}$, al è facil dimostrâ che lis dôs configurazions inte (4.11) di fat a coincidin. Si che duncje o vin dimostrât che cognossi lis primis cuatri frecuencis naturâls al permet di determinâ in maniere univoche lis dôs massis concentradis, fin a la simetrie rispjet a la sezion centrâl de nanotrâf.

O vin efetuât une schirie di simulazions numerichis par diviersis posizions di ponts masse e par diviersis intensitâts di masse. Te part seguitive, o presentìn

e discutì'n vot senaris, che a mostrin lis carateristichis principâls dal probleme inviers e de tecniche di identificazion. I prins cuatri câs, identificâts cun a, b, c, d , a corispuindin a lis posizions $s_1/L = 0.20$, $s_2/L = 0.35$, dulà che pai câs e, f, g, h o prossumìn $s_1/L = 0.20$, $s_2/L = 0.45$. Lis intensitâts di masse a van dal 0.4% al 10% de masse totâl de nanotrâf, che si viodi la Tabele 1.

La Tabele 2 e mostre i autovalôrs dal sisteme no perturbât e perturbât. I autovalôrs dal sisteme perturbât a son stâts otignûts cjatant la soluzion esate dal probleme dai autovalôrs cui valôrs reâi dai parametris di masse. I risultâts de identificazion a son ripuartâts te Tabele 3. Si pues osservâ che la soluzion previodude de teorie in gjenerâl e je une stime pluitost buine de soluzion esate dal probleme inviers. Lis discrepancis jenfri i parametris di masse identificâts e chei reâi a dipendin dome de ipotesi di perturbazion de piçule masse. Lis deviazions a son plui piçulis tal câs di massis di piçule intensitât, cemût che si pues spietâsi, parcè che il probleme inviers al è linearizât dongje de nanotrâf no perturbade. Erôrs massims di cirche 2 – 3% e 15 – 20% si osservin, tal ordin, pe posizion e pe intensitât.

Par completece, si à di notâ che lis simulazions numerichis no àn puartât a risultâts acurâts tal câs di ponts masse un dongje di chel altri. Il motîf di cheste discrepance al è peât a la procedure di ricostruzion che o vin mostrât parsore e, in particulâr, a la determinazion dai parametris S, P par mieç de inversion di un sisteme lineâr a doi a doi. Al è pussibil dimostrâ che la inversion di chest sisteme lineâr e je mal ponude cuant che $s_1 \simeq s_2$, di mût che i efets de ipotesi di un piçul dam a son amplificâts a fuart.

Table 1: Senaris par doi ponts masse $a - h$.

	a	b	c	d	e	f	g	h
s_1/L	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
s_2/L	0.350	0.350	0.350	0.350	0.450	0.450	0.450	0.450
$M_1/(\rho L)$	0.004	0.010	0.040	0.040	0.004	0.010	0.040	0.040
$M_2/(\rho L)$	0.008	0.020	0.050	0.100	0.008	0.020	0.050	0.100

5. Conclusions. La determinazion des massis zontadis tes nanotrâfs par mieç de misurazion dai spostaments des frecuencis di risonance al è un probleme inviers relevant in diviers cjamps des siencis aplicadis atuâls. No cate chest, i risultâts teorics su cheste classe di problemis a son inmò rârs. In cheste note si presentin risultâts otignûts di resint dai autôrs te identificazion di une masse piçule concentrade intune nanotrâf uniforme, supuartade ai doi cjaveçs, par mieç di dâts di autofrecuencis. La nanotrâf e je modelade daûr de teorie dal gradient di deformazion modificât e il metodi di identificazion al è fondât su une procedure di perturbazion che e disfrute la pussibilitât di scrivi in forme

Table 2: Primis cuatri frecuencis di risonance f_n^U pe nanotrâf no perturbade (U) e lôr valôrs f_n associâts ai vot senaris $a - h$ de Tabele 1. Valôrs in Hertz; i erôrs percentuâi $\Delta = 100 \times (f_n^U - f_n)/f_n^U$ a son indicâts jenfri parentesis.

U	a	b	c	d	e	f	g
82226	81597 (0.76)	80679 (1.88)	78146 (4.96)	75467 (8.22)	81480 (0.91)	80399 (2.22)	77514 (5.73)
329428	326553 (0.87)	322391 (2.14)	308682 (6.30)	301057 (8.61)	327989 (0.44)	325844 (1.09)	316383 (3.96)
743182	740401 (0.37)	736421 (0.91)	719547 (3.18)	719245 (3.22)	735963 (0.97)	725806 (2.34)	696268 (6.31)
1326096	1314948 (0.84)	1299229 (2.03)	1259519 (5.02)	1221730 (7.87)	1320697 (0.41)	1312952 (0.99)	1289526 (2.76)

Table 3: Risultâts de identificazion pai vot senaris $a - h$ de Tabele 1. Determinazion des intensitâts di masse M_i e des corispondentis pozisions de masse s_i , $i = 1, 2$. I erôrs percentuâi pe pozizion, $err(s) = 100 \times (s_{ident} - s_{exact})/L$, e pe intensitât di masse, $err(M) = 100 \times (M_{ident} - M_{exact})/M_{exact}$, a son indicâts jenfri parentesis.

	a	b	c	d	e	f	g	h
s_1/L	0.202 (0.24)	0.206 (0.59)	0.210 (0.96)	0.230 (2.96)	0.202 (0.21)	0.205 (0.51)	0.211 (1.14)	0.223 (2.30)
s_2/L	0.351 (0.08)	0.352 (0.21)	0.353 (0.30)	0.361 (1.10)	0.449 (-0.10)	0.448 (-0.24)	0.442 (-0.83)	0.443 (-0.74)
$M_1/(\rho L)$	0.004 (4.91)	0.010 (3.36)	0.037 (-6.44)	0.041 (2.80)	0.004 (4.13)	0.010 (1.52)	0.037 (-6.55)	0.037 (-8.57)
$M_2/(\rho L)$	0.008 (3.64)	0.020 (0.12)	0.047 (-6.90)	0.080 (-20.02)	0.008 (3.95)	0.020 (0.88)	0.046 (-7.25)	0.084 (-15.76)

esplicite la variazion di prin ordin des frecuencis di risonance causade di un pont masse. Il metodi al è gjeneralizât a la identificazion di dôs massis concentradis par mieç de misurazion des primis cuatri frecuencis di risonance. A supuart des previsions teorichis, si son presentâts ancje i risultâts des simulazions numerichis.