Gjornâl Furlan des Siencis **25.** 2018, 9-27

Un model mecanic par lis piçulis vibrazions di une tele di rai elitiche

JORDI KINDT*, ANTONINO MORASSI*

Ristret. Di resint, Morassi, Soer e Zaera (2017) a an proponût un model a membrane continue pe deformazion innitesimâl di une tele di rai cun simetrie assiâl. Cun chest contribût, o proponn une estension di chel model a lis telis di rai di forme elitiche. In particolâr, a son studiadis tal detai la analisi de pretrazion che e agjs su la congurazion di riferiment e lis vibrazions trasversâls libaris di une tele di rai elitiche supuartade tal contor.

1. Introduzion. Chest contribût al puarte indenant une linie di ricercje inviade in Morassi et al. (2017) e smirade a disvilupâ un model mecanic par telis di rai. La tele di rai e je un sisteme bio-mecanic complès che, te leterature sientifiche dai ultins cuarante agns, al à atirât cetant interès, sei dal pont di viste de biologjie sei di chel de biomecaniche. Par une rassegne inzornade dal stât de art e par une discussion su la utilitât des metodichis fondadis su la elaborazion di modei pal studi de rispueste dinamiche des telis di rai o fasìn riferiment a la sezion introdutive di Morassi et al. (2017) e di Mortimer et al. (2016). Achì, si limitìn a ricuardâ che il prin model bidimensionâl discret di tele di rai al è stât proponût di Aoyanagi & Okumura (2010, 2015). Chel model al jere formât di un numar finît di fîi radiâi e circonferenziâi, dulà che, te configurazion di riferiment, ognidun dai fîi al vignive descrit tant che une suste tirade sogjete a une fuarce di pretrazion. Il model al fo doprât par determinâ il stât di pretrazion intune tele a simetrie assiâl intate, e intune tele danezade gjavant vie cualchi fîl circonferenziâl. Il model discret di Aoyanagi e Okumura al jere puramentri static, e la pussibilitât di doprâlu par studiâ sei la rispueste tal plan sei chê fûr

* Dipartiment Politecnic di Inzegnarie e Architeture, Universitât dal Friûl, Udin, Italie.
E-mail: kindt.jordi@spes.uniud.it; antonino.morassi@uniud.it

dal plan no fo esplorade, nancje te ipotesi di deformazions une vore piçulis de tele. In Morassi et al. (2017) al è stât proponût un model a membrane continue pe deformazion infinitesimâl des telis di rai. Il model al è stât elaborât par une classe specifiche di telis di rai: lis telis circolârs dotadis di simetrie assiâl. La tele reâl discrete, ven a stâi formade di un numar finît di fîi radiâi e circonferenziâi, e je stade sostituide, par aprossimazion, di une membrane elastiche continue, presuponint che il spazi jenfri un fîl e chel altri al sedi cussì piçul di podê considerâ la tele une membrane continue. La membrane dal model e à une struture fibrose specifiche, derivade da la struture de tele discrete origjinâl e, te configurazion di riferiment, e je subiete a pretrazion. Tal lavôr di Morassi et al. (2017) a son stâts studiâts tal detai la vibrazion trasversâl libare fûr dal plan e tal plan, adun cu la descrizion de pretrazion che e agjìs te configurazion di riferiment.

Si ben che il model proponût di Morassi, Soer e Zaera al puedi jessi adatât par riprodusi diviersis struturis gjeometrichis, in Morassi et al. (2017) la atenzion e jere stade limitade a telis di forme circolâr fatis in mût che i fîi circonferenziâi a fossin part di cerclis concentrics. Il fin principâl di chest lavôr al è chel di slargjâ la analisi svilupade in Morassi et al. (2017) a lis telis di rai di forme elitiche, ven a stâi chês telis che a àn la struture fibrose de membrane continue formade di fîi radiâi drets e di fîi elitics.

La analisi de gjeometrie elitiche no je par nuie une cuistion di pôc cont e, anzit, rispiet al câs de forme circolâr, par podê analizâ il probleme si à scuignût introdusi inmò altris ipotesis *a priori*. Di chestis ipotesis, une e rivuarde la sielte dal stât iniziâl di pretrazion te tele di rai, sei cu la spirâl *ausiliarie* sei cu la spirâl *di cature*. Une altre diference rispiet al câs de tele circolâr e je la impossibilitât di separâ la variabil radiâl di chê angolâr tal studi da lis vibrazions trasversâls, separazion che e jere pussibile te simetrie circolâr. Par chel che al inten chest ultin pont, al ven dimostrât che lis frecuencis naturâls a puedin jessi stimadis di parsore e di parsot in tiermins di chês corispondentis di une tele circolâr, e che la aprossimazion e je tant buine tant la forme elitiche e je dongje di chê di un cercli.

2. Aspiets cinematics. La tele di rai elitiche cjapade in considerazion in chest lavôr e je une rêt formade di doi fameis di fîi che si incrosin tra di lôr, cemût che si viôt te Figure 1. Intune confgurazion di riferiment $\mathcal{B}_k$, une des dôs fameis e coincît cu lis liniis che a traviersin in direzion radiâl la origjin O di un sisteme di coordenadis cartesianis bidimensionâl $\{O, X_1, X_2\}$ (*fîi radiâi*). Chê altre famee e je formade di elissis omotopichis (*fîi elitics*) cui diametris che si disvilupin, rispetivementri, dilunc dai as X_1, X_2 di lungjece $2aR$, $2bR$, dulà che a, $b \in \mathbb{R}$ e $R > 0$ e je une lungjece definide.

Si partìs de presuposizion che i fîi di ognidune des dôs fameis a sedin avonde dongje un di chel altri di podê descrivi la tele tant che une membrane continue

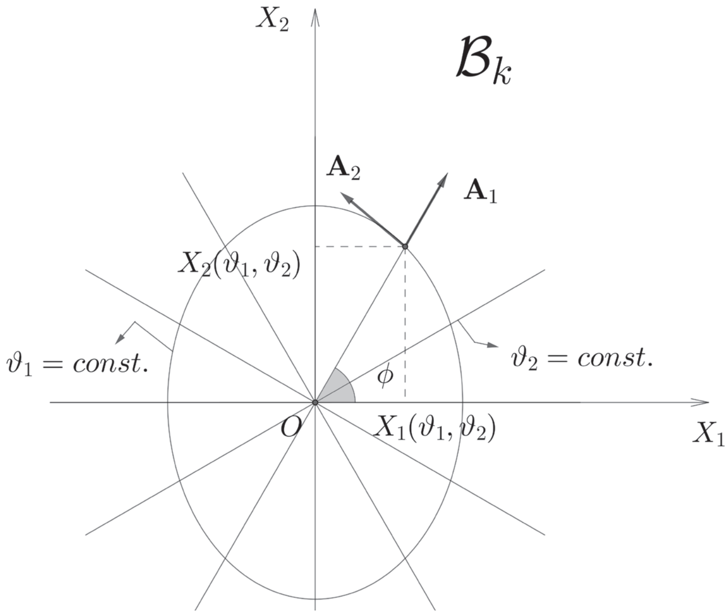

Figure 1: Configurazion di riferiment, rapresentazion parametriche e base covariante.

bidimensionâl di forme elitiche. Pe precision, la colocazion di riferiment $\mathbf{X}$ de particule X in $\boldsymbol{B}_k$ e je dade di

$$\mathbf{X} = X_1(\vartheta_1, \vartheta_2)\mathbf{E}_1 + X_2(\vartheta_1, \vartheta_2)\mathbf{E}_2 = \vartheta_1(a \cos \vartheta_2 \mathbf{E}_1 + b \sin \vartheta_2 \mathbf{E}_2), \tag{2.1}$$

$$\vartheta_1 = \rho,\ \vartheta_2 = \phi,\ \vartheta_1 \in [0, R],\ \vartheta_2 \in [0, 2\pi], \tag{2.2}$$

dulà che $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2\}$ e je la base canoniche di $\mathbb{R}^3$, ven a stâi $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = \delta_{ij}$, cun $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $i, j = 1, 2, 3$. Achì, "$\times$" e "$\cdot$" a denotin, tal ordin, il prodot vetoriâl e scalâr in $\mathbb{R}^3$. Fasint riferiment a la Figure 1, i fîi radiâi in $\mathcal{B}_k$ a coincidin cu lis coordenadis curviliniis $\vartheta_2 =$ costante, impen i fîi elitics a son formâts dai ponts cun coordenadis cartesianis (X_1, X_2) che a sodisfin la ecuazion

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = \rho^2, \qquad \rho \in [0, R]. \tag{2.3}$$

La nestre analisi e je disvilupade sot de condizion

$$b > a \tag{2.4}$$

e, in particolâr, o cjaparìn in considerazion l'interval realistic di valôrs

$$\frac{b}{a} \in [1.1, 1.3], \tag{2.5}$$

che al è sodisfat sù par jù da la plui part des telis di rai reâls, cemût che si viôt, par esempli, te Figure 2. Di notâ che la gjeometrie a simetrie assiâl de tele, che e je stade cjapade in considerazion in Morassi et al. (2017), si oten presuponint che $a = b = 1$.
La base unitarie dai vetôr tangjents ai fîi de famee αe e je $\frac{\mathbf{A}_\alpha}{|\mathbf{A}_\alpha|}$, dulà che $\mathbf{A}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \vartheta_\alpha} \equiv \mathbf{X}_{,\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, a son dâts di

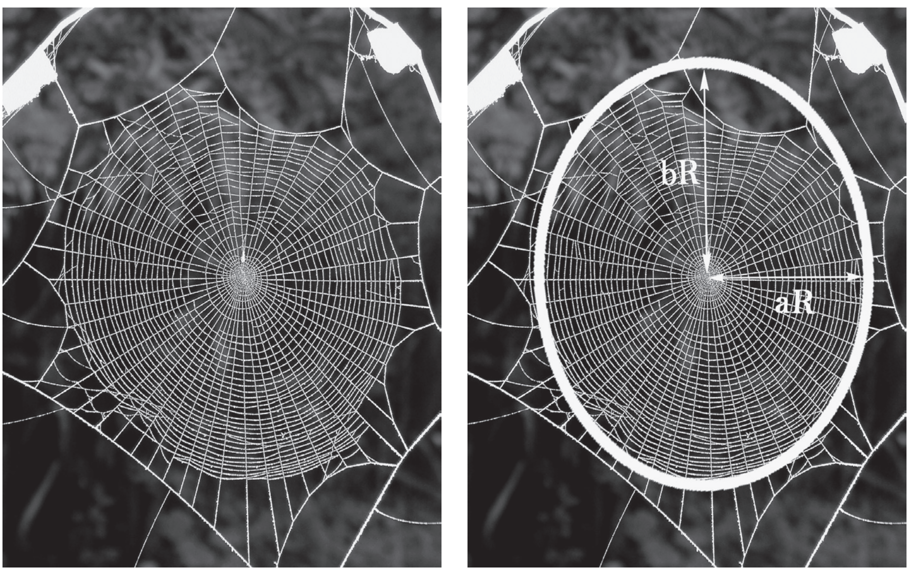

Figure 2: Gjeometrie reâl di une tele di rai (çampe) e la sô aprossimazion elitiche (drete).

$$\mathbf{A}_1 = a \cos \vartheta_2 \mathbf{E}_1 + b \sin \vartheta_2 \mathbf{E}_2, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{A}_2 = \vartheta_1(-a \sin \vartheta_2 \mathbf{E}_1 + b \cos \vartheta_2 \mathbf{E}_2), \tag{2.7}$$

e $|\mathbf{A}_\alpha| = (\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha)^{\frac{1}{2}}$. Achì, $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 = \mathbf{E}_3\}$ e je la base covariante a un pont $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_k$, e $\{\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}_3\}$ e je la base cuintrivariante al stes pont, cun $\mathbf{A}^\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta = \delta^\alpha_\beta$, dulà che $\delta^\alpha_\beta = 1$ se $\alpha = \beta$ e $\delta^\alpha_\beta = 0$ se $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2$,

$$\mathbf{A}^1 = \frac{\cos \vartheta_2}{a} \mathbf{E}_1 + \frac{\sin \vartheta_2}{b} \mathbf{E}_2, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{A}^2 = \frac{1}{\vartheta_1}(-\frac{\sin\vartheta_2}{a}\mathbf{E}_1 + \frac{\cos\vartheta_2}{b}\mathbf{E}_2). \tag{2.9}$$

La nestre analisi e je limitade a la deformazion infinitesimâl a partî de configurazion di riferiment $\mathcal{B}_k$. La colocazion efetive di une particule $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_k$ intum moment dât t (che culì al è ometût par no complicâ la notazion) al è denotât di $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X})$. Il cjamp vetoriâl dal spostament $\mathbf{u} : \mathcal{B}_k \to \mathbb{R}^3$ al è rapresentât tant che

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^{2} u^\alpha \mathbf{A}_\alpha + u^3 \mathbf{A}_3, \tag{2.10}$$

dulà che u^α, $\alpha = 1, 2$, a son lis componentis cuintrivariantis di $\mathbf{u}$. Al è di notâ che, di chi indevant, i indiçs Grêcs a cjapin i valôrs 1, 2, e la sume totâl dai indiçs e je indicade in maniere esplicite. Assumi la deformazion infinitesimâl al impliche che

$$\max\left(\frac{|\mathbf{u}(\mathbf{X})|}{\mathrm{diam}(\mathcal{B}_k)} + \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}\right) < \varepsilon, \qquad \mathbf{X} \in \mathcal{B}_k, \tag{2.11}$$

dulà che $\varepsilon \in (0, 1)$ al è un numar piçul e dulà che dutis lis cuantitâts di ordin $O(\varepsilon^\tau)$, cun $\tau > 1$, a son trascuradis.

In ultin, o denotìn cun $\frac{\mathbf{a}_\alpha}{|\mathbf{a}_\alpha|}$, $\alpha = 1, 2$, la base unitarie dai vetôrs tangjents ai fîi de famee αe te configurazion efetive $\mathcal{B}$ da la membrane, cemût che si viôt te Figure 3, ven a stâi

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \vartheta_\alpha} \equiv \mathbf{x}_{,\alpha} = \mathbf{A}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, \tag{2.12}$$

dulà che

$$\mathbf{a}_1 = (1 + u^1_{,1})\mathbf{A}_1 + \left(u^2_{,1} + \frac{u^2}{\rho}\right)\mathbf{A}_2 + u^3_{,1}\mathbf{E}_3, \tag{2.13}$$

$$\mathbf{a}_2 = (u^1_{,2} - \rho u^2)\mathbf{A}_1 + \left(1 + u^2_{,2} + \frac{u^1}{\rho}\right)\mathbf{A}_2 + u^3_{,2}\mathbf{E}_3. \tag{2.14}$$

La base cuintrivariante $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\}$ intun pont $\mathbf{x}$ di $\mathcal{B}$ e je definide tant che $\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \delta^\alpha_\beta$, $\mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \mathrm{x}\, \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \mathrm{x}\, \mathbf{a}_2|}$, e o vin

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^1 = {} & \frac{1}{\rho^2 a^2 b^2}\left[(A_{12}(u^1_{,2} - \rho u^2) + A_{22}(1 - u^1_{,1}))\right]\mathbf{A}_1 + \\ & + \frac{1}{\rho^2 a^2 b^2}\left[(-A_{11}(u^1_{,2} - \rho u^2) - A_{12}(1 - u^1_{,1}))\right]\mathbf{A}_2 + \\ & + \frac{1}{\rho^2 a^2 b^2}\left[(A_{22}u^3_{,1} - A_{12}u^3_{,2})\right]\mathbf{E}_3,\end{aligned} \tag{2.15}$$

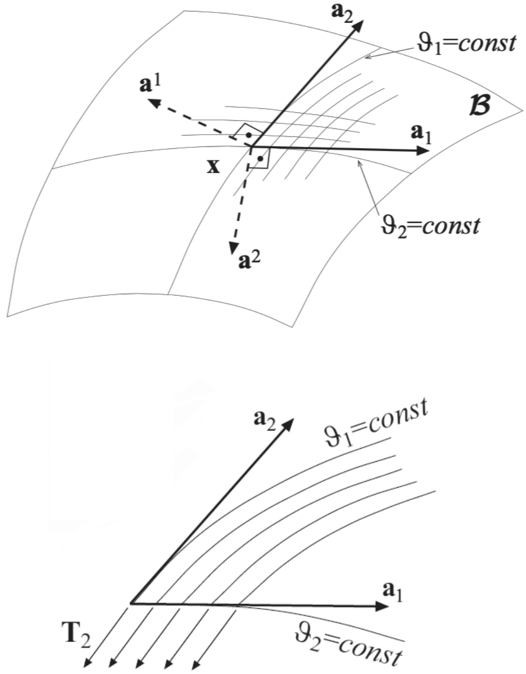

Figure 3: Configurazion efetive, basis covariante and cuintrivariante, e fuarcis internis.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}^2 = \frac{1}{\rho^2 a^2 b^2} \left[\left(-A_{22} \left(u^2_{,1} + \frac{u^2}{\rho} \right) - A_{12} \left(1 - u^2_{,2} - \frac{u^1}{\rho} \right) \right) \right] \mathbf{A}_1 + \\
+ \frac{1}{\rho^2 a^2 b^2} \left[\left(A_{12} \left(u^2_{,1} + \frac{u^2}{\rho} \right) + A_{11} \left(1 - u^2_{,2} - \frac{u^1}{\rho} \right) \right) \right] \mathbf{A}_2 + \\
+ \frac{1}{\rho^2 a^2 b^2} \left[(A_{11} u^3_{,2} - A_{12} u^3_{,1}) \right] \mathbf{E}_3 .
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

3. Densitât des fibris. O assumìn sedi che i fîi radiâi in $\mathcal{B}_k$ a sedin ecuidistants tal angul plan 2π sedi che i fîi elitics a sedin ecuidistants dilunc de direzion radiâl. Sì che duncje, denotant cun $\bar{d}_1, \bar{d}_2$ lis densitâts dai fîi in $\mathcal{B}_k$ pai fîi radiâi e elitics, o vin

$$
\bar{d}_1 = \frac{C^\rho}{\rho\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}},
\tag{3.1}
$$

$$\bar{d}_2 = \frac{C^\phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}, \tag{3.2}$$

li che lis costantis positivis C^ρ, C^ϕ a son, tal ordin, il numar $\overline{\#}_\rho$ di fîi radiâi par unitât di angul plan e il numar $\overline{\#}_\phi$ di fîi elitics par unitât di lungjece dilunc de direzion radiâl in $\mathcal{B}_k$.

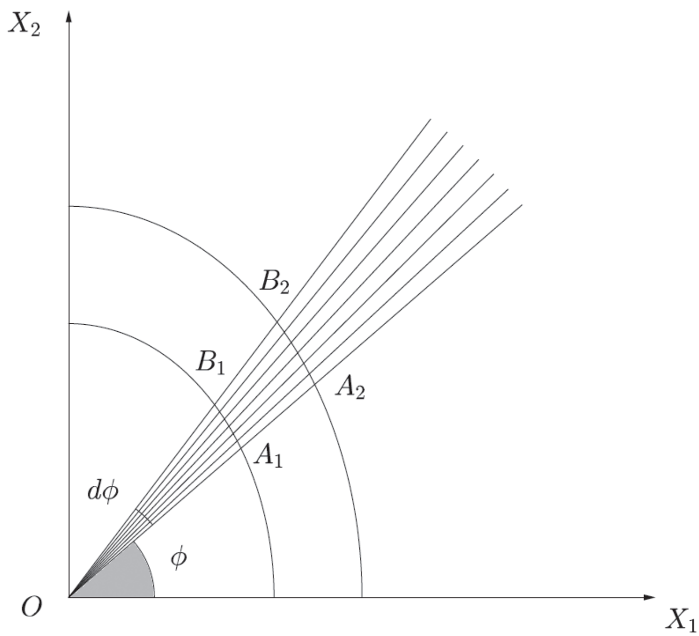

Figure 4: Doi fîi elitics cualsisei a incrosin il stes numar di fîi radiâi.

In riferiment ae Figure 4, la espression (3.1) di $\bar{d}_1$ e garantìs che il numar di fîi radiâi che a intersechin i doi arcs elitics A_1B_1 (che al corispuint a $\rho = \rho_1$) e A_2B_2 ($\rho = \rho_2 > \rho_1$) al coincidi. Duncje, o vin

$$\overline{\#}_\rho(A_1B_1) = \bar{d}_1(A_1B_1)ds_1, \qquad \overline{\#}_\rho(A_2B_2) = \bar{d}_1(A_2B_2)ds_2, \tag{3.3}$$

dulà che ds_1, ds_2 a son, tal ordin, lis lungjecis dai arcs A_1B_1, A_2B_2. Se o tignìn par bon che i ponts A_α, B_α dâts di $A_\alpha = (\rho_\alpha, \phi)$, $B_\alpha = (\rho_\alpha, \phi + d\phi)$, $\alpha = 1, 2$, dulà che ϕ al è un angul dât e $d\phi$ al è un increment infinitesimâl, cun (2.1) o otignìn $ds_\alpha = \rho_\alpha \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}\, d\phi$, $\alpha = 1, 2$. Sì che duncje, doprant (3.1) in (3.3), o otignìn $\overline{\#}_\rho(A_1B_1) = \overline{\#}_\rho(A_2B_2)$. In maniere simile, la espression (3.2) di $\bar{d}_2$ e permet di conservâ il numar di fîi elitics che a intersechin i segments $\overline{A_1B_1}$ (che al corispuint a $\phi = \phi_1$) e $\overline{A_2B_2}$ ($\phi = \phi_2 > \phi_1$), dulà che

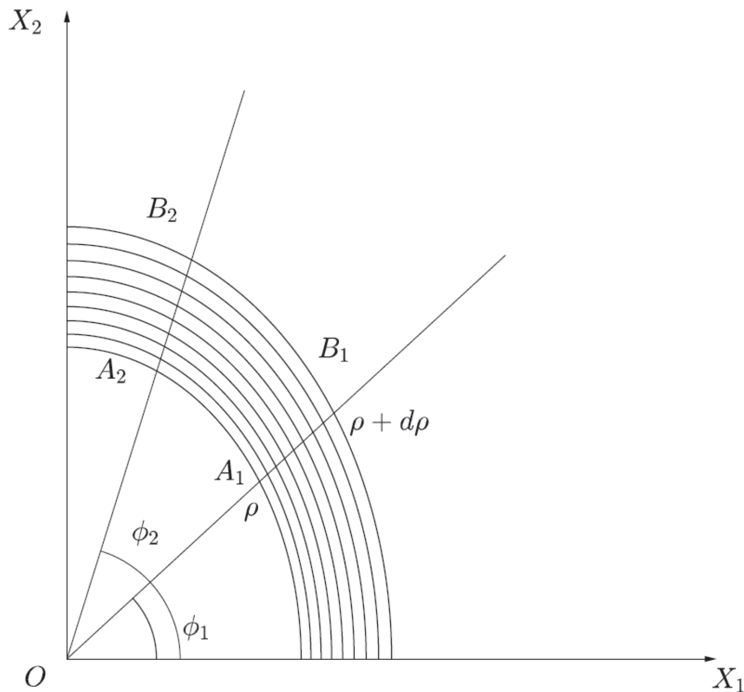

Figure 5: Doi fîi radiâi cualsisei a incrosin il stes numar di fîi elitics.

$A_\alpha = (\rho, \phi_\alpha)$, $B_\alpha = (\rho + d\rho, \phi_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, e $d\rho$ al è un increment infinitesimâl dal parametri ρ. In riferiment ae Figure 5 o vin

$$\overline{\#}_\phi(A_1B_1) = \bar{d}_2(A_1B_1)ds_1, \quad \overline{\#}_\phi(A_2B_2) = \bar{d}_2(A_2B_2)ds_2, \tag{3.4}$$

dulà che ds_1, ds_2 a son, tal ordin, lis lungjecis dai segments $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$. Cun (2.1) o otignìn $ds_\alpha = \sqrt{a^2 \cos^2 \phi_\alpha + b^2 \sin^2 \phi_\alpha}\, d\rho$, $\alpha = 1, 2$, e, duncje, cun (3.2), o otignìn $\overline{\#}_\phi(A_1B_1) = \overline{\#}_\phi(A_2B_2)$.

Al è di osservâ che la analisi de densitât des fibris fate fin ca e pues jessi slargjade par cjapâ dentri situazions plui gjenerâls li che, par esempli, $C^\rho = C^\rho(\phi)$ e $C^\phi = C^\phi(\rho)$. Di chi indenant, par semplicitât, o presuponìn che la densitât des fibris e sedi uniforme.

Al è clâr che pe nestre analisi de deformazion o vin di dâ par bon che nol sedi nissun sbrissament o soreposizion tra lis fibris che a fain part des stesse famee o di dôs fameis diferentis di fîi, in mût che ognidune des particulis e sedi traviersade des stessis fibris in ogni deformazion. Daûr di cheste ipotesi, la espression de densitât des fibris d_1, d_2 te configurazion efetive $\mathcal{B}$ e pues jessi rigjavade postulant la conservazion dal numar di fîi che a incrosin une fibre materiâl che si cjate su di une coordenade curvilinie in $\mathcal{B}_k$ e chei corispuindints che a incrosin la sô imagjin daspò de deformazion. Indi ven daûr che

$$d_1 = \bar{d}_1 \sqrt{\left(\frac{A_{22}}{a_{22}}\right)}, \quad d_2 = \bar{d}_2 \sqrt{\left(\frac{A_{11}}{a_{11}}\right)}, \tag{3.5}$$

dulà che $A_{\alpha\alpha} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha$, $a_{\alpha\alpha} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Daspò de liniarizazion, o rigjavìn

$$d_1 = \bar{d}_1 \left(1 - u^2_{,2} - \frac{u^1}{\rho} - r_1 \left(\frac{u^1_{,2}}{\rho} - u^2\right)\right), \tag{3.6}$$

$$d_2 = \bar{d}_2 \left(1 - u^1_{,1} - r_2(\rho u^2_{,1} + u^2)\right), \tag{3.7}$$

cui numars r_1, r_2 definîts tant che

$$r_1 = \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\phi}{2(a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi)}, \tag{3.8}$$

$$r_2 = \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\phi}{2(a^2 \cos^2\phi + b^2 \sin^2\phi)}. \tag{3.9}$$

4. Fuarcis di contat internis e ecuazions di ecuilibri. Cheste analisi e je fate daûr des ipotesis e argomentazions dimostradis in Morassi et al. (2017). Par comoditât dal letôr, dut câs, o riclamìn i aspiets essenziâi di chel lavôr.

O assumìn che la fuarce interne su un element a arc de αe famee di fîi te configurazion efetive $\mathcal{B}$ e sedi une fuarce di trazion paralele a la αe coordenade curvilinie, ven a stâi paralele a $\frac{\mathbf{a}_\alpha}{|\mathbf{a}_\alpha|}$, e o denotìn cun $\mathbf{n}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{a}_\alpha}{|\mathbf{a}_\alpha|}\right)$ la fuarce par unitât di lungjece che e agjìs su un arc de superficie efetive $\mathcal{B}$ cun normâl unitarie $\frac{\mathbf{a}^\alpha}{|\mathbf{a}^\alpha|}$, $\alpha = 1, 2$. O assumìn che il cjamp di fuarce esterne che al agjìs su la membrane deformade al sedi

$$\mathbf{p} = \sum_{\alpha=1}^{2} p^\alpha \mathbf{a}_\alpha + p^3 \mathbf{a}_3, \tag{4.1}$$

dulà che p^α, p^3 a son funzions regolârs di $\mathbf{x}$, $\alpha = 1, 2$, verisimilmentri coincidentis, tal câs dinamic, cun lis fuarcis inerziâls par unitât di superficie. Daûr dal leme di Cauchy, par ognidun dai vetôrs unitaris $\boldsymbol{\nu}$ che è fasin part dal plan tangjent a la superficie $\mathcal{B}$ a $\mathbf{x}$, al esist un unic cjamp tensionâl $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{x})$ tâl che $\mathbf{n}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}$, e duncje

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^{2} \mathbf{N}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha, \quad \mathbf{N}^\alpha = \mathbf{n}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{a}^\alpha}{|\mathbf{a}^\alpha|}\right)|\mathbf{a}^\alpha| \equiv \sum_{\beta=1}^{2} N^{\alpha\beta}\mathbf{a}_\beta, \quad \alpha = 1, 2. \tag{4.2}$$

In particolâr, sul element a arc de superficie cun normâl $\frac{\mathbf{a}^2}{|\mathbf{a}^2|}$ e agjìs une fuarce paralele a $\mathbf{a}_2$ e, te stesse maniere, sul element a arc de superficie cun normâl $\frac{\mathbf{a}^1}{|\mathbf{a}^1|}$ e agjìs une fuarce paralele a $\mathbf{a}_1$. E duncje

$$\mathbf{n}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{a}^\alpha}{|\mathbf{a}^\alpha|}\right) = d_\alpha \mathbf{T}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{4.3}$$

li che $\mathbf{T}_\alpha$ e je la trazion su di un *singul* fîl de αe coordenade curvilinie (vâl a dî, una vetôr fuarce paraleli a $\mathbf{a}_\alpha$), e d_α e je la densitât des fibris dai fîi de αe famee.

I fîi a àn une resistence trascurabil al tai e a la flession, e o presuponìn che la entitât de fuarce $\mathbf{T}_\alpha$ e dipendi dome dal slungjament te direzion de αe coordenade curvilinie, ven a stâi

$$\mathbf{T}_\alpha = (\overline{T}_\alpha + A_\alpha \sigma_\alpha)\frac{\mathbf{a}_\alpha}{|\mathbf{a}_\alpha|}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{4.4}$$

Te espression chi parsore, $\overline{T}_\alpha > 0$ e je la la fuarce di pretrazion che e agjìs te configurazion di riferiment $\mathcal{B}_k$; A_α e je la aree de sezion di un singul fîl che al fâs part de αe famee e σ_α e je la tension normâl causade de deformazion dal fîl. Cun (4.2)–(4.4), o vin

$$\mathbf{N}^\alpha = d_\alpha(\overline{T}_\alpha + A_\alpha \sigma_\alpha)\frac{|\mathbf{a}^\alpha|}{|\mathbf{a}_\alpha|}\mathbf{a}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \tag{4.5}$$

o, tes componentis cuintrivariantis,

$$N^{11} = d_1(\overline{T}_1 + A_1\sigma_1)\sqrt{\frac{|a^{11}|}{|a_{11}|}}, \tag{4.6}$$

$$N^{22} = d_2(\overline{T}_2 + A_2\sigma_2)\sqrt{\frac{|a^{22}|}{|a_{22}|}}, \tag{4.7}$$

$$N^{12} = N^{21} = 0. \tag{4.8}$$

dulà che $a^{\alpha\alpha} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\alpha$, $\alpha = 1, 2$.

Se ipotizìn di vê ce fâ cuntun materiâl elastic, o vin

$$\sigma_\alpha = E_\alpha \varepsilon_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, \tag{4.9}$$

dulà che $E_\alpha > 0$ al è il modul dal materiâl di Young e ε_α e je la misure di slungjament dai fîi che a fasin part de αe famee. Se o presuponìn (2.10) sul cjamp di spostament e o cjapìn in considerazion dome piçulis deformazions, la version liniarizade di ε_α e je $\varepsilon_\alpha = \frac{u_\alpha|_\alpha}{A_{\alpha\alpha}}$, $\alpha = 1, 2$, dulà che la derivade covariante $u_\alpha|_\alpha$ de componente covariante u_α rispiet a ϑ_α e je dade di

$$u_\alpha|_\alpha = u_{\alpha,\alpha} - \sum_{\delta=1}^{2} \overline{\Gamma}^\delta_{\alpha\alpha} u_\delta, \qquad \alpha = 1, 2, \tag{4.10}$$

e $\overline{\Gamma}^\delta_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{A}^\delta$ al è il simbul di Christoffel definît su la configurazion di riferiment $\mathcal{B}_k$. In particolâr, o vin

$$u_1|_1 = u_{1,1}, \quad u_2|_2 = u_{2,2} + \rho u_1 \tag{4.11}$$

e

$$\varepsilon_1 = \frac{u_{1,1}}{(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{u_{2,2} + \rho u_1}{\rho^2(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)}. \tag{4.12}$$

Lis ecuazions diferenziâls di ecuilibri a puedin jessi rigjavadis de ecuazion di belanç de fuarce di Eulero-Cauchy su $\mathcal{B}$, doprant il leme di Cauchy e aplicant il Teoreme di Divergjence. Daûr de ipotesi di cjamps tensoriâi e vetoriâi regolârs, o vin

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^2 N^{\gamma\alpha}|_\alpha + p^\gamma = 0, \quad \text{in } \mathcal{B},\ \gamma = 1, 2, & (4.13) \\ \sum_{\alpha,\beta=1}^2 N^{\beta\alpha} b_{\beta\alpha} + p^3 = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}, & (4.14) \end{cases}$$

dulà che

$$N^{\gamma\alpha}|_\alpha = N^{\gamma\alpha}{}_{,\alpha} + \sum_{\delta=1}^{2} N^{\gamma\delta}\Gamma^\alpha_{\delta\alpha} + \sum_{\delta=1}^{2} N^{\delta\alpha}\Gamma^\gamma_{\delta\alpha}, \tag{4.15}$$

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}^\gamma, \tag{4.16}$$

$$b_{\beta\alpha} = \sum_{\gamma=1}^{2} b^\gamma_\alpha a_{\gamma\beta}, \qquad a_{\gamma\beta} = \mathbf{a}_\gamma \cdot \mathbf{a}_\beta, \qquad b^\gamma_\alpha = -\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}^\gamma. \tag{4.17}$$

Par finì, cul inseriment des espressions de densitât efetive dai fîi (3.6), (3.7) in (4.6), (4.7), e doprant lis espressions (4.12) di ε_1, ε_2, daspò di vê lassât in bande i tiermins di ordin plui alt, o rigjavìn lis ecuazions costitutivis liniarizadis des solecitazions de membrane

$$N^{11} = \frac{\bar{d}_1(\overline{T}_1 + A_1\sigma_1)}{ab}\left(1 - u^2_{,2} - \frac{u^1}{\rho} - 2u^1_{,1} - r_2\left(\rho u^2_{,1} + u^2\right)\right)\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}, \tag{4.18}$$

$$N^{22} = \frac{\bar{d}_2(\overline{T}_2 + A_2\sigma_2)}{\rho^2 ab}\left(1 - u^1_{,1} - 2\left(u^2_{,2} + \frac{u^1}{\rho}\right) - r_1\left(\frac{u^1_{,2}}{\rho} - u^2\right)\right)\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}. \tag{4.19}$$

5. Stât di presolecitazion. La espression dal stât di presolecitazion che al agjis su la configurazion di riferiment $\mathcal{B}_k$ de membrane e pues rigjavade valutant lis espressions (4.18), (4.19) di N^{11}, N^{22} par un cjamp di spostament nul. O vin

$$\overline{N}^{11} = \frac{\bar{d}_1 \overline{T}_1}{ab} \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}, \tag{5.1}$$

$$\overline{N}^{22} = \frac{\bar{d}_2 \overline{T}_2}{\rho^2 ab} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}, \quad \left(\overline{N}^{12} = \overline{N}^{21} = 0 \right). \tag{5.2}$$

Riclamant lis espressions (3.1), (3.2) de densitât des fibris e lis definizions (3.8), (3.9) des cuantitâts r_1 e r_2, o vin

$$\overline{N}^{11} = \frac{C^{\rho} \overline{T}_1}{\rho ab \sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}, \tag{5.3}$$

$$\overline{N}^{22} = \frac{C^{\phi} \overline{T}_{\phi}}{\rho^2 ab \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}}, \tag{5.4}$$

cun C^{ρ}, C^{ϕ} costantis.

Il cjamp di presolecitazion $\overline{N}^{\alpha\beta}$ al à di sodisfâ lis ecuazions di ecuilibri cuntune cjame nule, ven a stâi

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{2} \overline{N}^{\gamma\alpha}|_{\alpha} = 0, \quad \gamma = 1, 2, \qquad \text{in } \mathcal{B}_k, & (5.5) \\ \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \overline{N}^{\beta\alpha} \bar{b}_{\beta\alpha} = 0, \qquad \text{in } \mathcal{B}_k, & (5.6) \end{cases}$$

dulà che $\bar{b}_{\beta\alpha}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, a son i coeficients de seconde forme fondamentâl de superficie de tele te sô configurazion di riferiment (o ben, te configurazion plache) $\mathcal{B}_k$. Stant che dutis chês di $\bar{b}_{\beta\alpha}$ si anulin in $\mathcal{B}_k$, la ecuazion di ecuilibri de fuarce in direzion trasversâl (5.6) a divente une identitât, impen lis ecuazions di ecuilibri tal plan in (5.5) a diventin

$$\begin{cases} \overline{N}^{\rho\rho}{}_{,\rho} + \frac{\overline{N}^{\rho\rho}}{\rho} - \rho \overline{N}^{\phi\phi} = 0, & (5.7) \\ \overline{N}^{\phi\phi}{}_{,\phi} = 0. & (5.8) \end{cases}$$

O visìn che, di chi indenant, o vin definît $\overline{N}^{\rho\rho} = \overline{N}^{11}$, $\overline{N}^{\phi\phi} = \overline{N}^{22}$. Cun di plui, o doprarìn la notazion $\overline{T}_{\rho} = \overline{T}_1$, $\overline{T}_{\phi} = \overline{T}_2$, $(\cdot)_{,\rho} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\rho}$, $(\cdot)_{,\phi} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\rho}$.
La ecuazion (5.8) e compuarte

$$\overline{N}^{\phi\phi} = \overline{N}^{\phi\phi}(\rho), \tag{5.9}$$

ven a stâi, riclamant la (5.4),

$$\frac{\overline{T}_\phi(\rho,\phi)}{\sqrt{a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi}}:=\overline{\tau}_\phi(\rho), \tag{5.10}$$

li che $\overline{\tau}_\rho(\rho)$ e je une funzion di determinâ. Cun la (5.10), la ecuazion (5.7) e pues jessi scrite tant che

$$(\rho\overline{N}^{\rho\rho})_{,\rho}=\frac{C^\phi}{ab}\overline{\tau}_\phi(\rho), \tag{5.11}$$

e, duncje,

$$(\rho\overline{N}^{\rho\rho})_{,\rho\phi}=0, \tag{5.12}$$

che al compuarte

$$\frac{C^\rho}{ab}\cdot\frac{\overline{T}_\rho(\rho,\phi)}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}}=p(\rho)+q(\phi), \tag{5.13}$$

dulà che $p=p(\rho)$ e $q=q(\phi)$ a son dôs funzions di cjatâ. La ecuazion chi parsore e mostre che il probleme de determinazion dal stât di presolecitazion in chest tratament al è indefinît. Par indagâ la esistence di un stât tensionâl di pretrazion ecuilibrât, o presuponin che $q(\phi)\equiv 0$, che al vûl dî che

$$\frac{\overline{T}_\rho(\rho,\phi)}{\sqrt{a^2\cos^2\phi+b^2\sin^2\phi}}:=\overline{\tau}_\rho(\rho). \tag{5.14}$$

Se o metìn lis (5.10), (5.14) dentri la (5.7), o rigjavìn une ecuazion diferenziâl singule che e cjape dentri dôs funzions no cognossudis, o ben

$$\overline{\tau}'_\rho(\rho)=\xi\overline{\tau}_\phi(\rho), \qquad \text{in } (0,R), \tag{5.15}$$

dulà che $\xi=\frac{C^\phi}{C^\rho}>0$ e $\overline{\tau}'_\rho(\rho)=\frac{d\overline{\tau}_\rho(\rho)}{d\rho}$.

Daûr des ipotesis discutudis in Morassi et al. (2017), o vin di introdusi ancje une ipotesi su la pretrazion circonferenziâl $\overline{\tau}_\phi(\rho)$. O podìn individuâ dôs situazions principâls, che a corispuindin al procès di costruzion chei i rais a seguissin realmentri tal fâ sù lis lôr telis. Pai detais o rimandìn a Morassi et al. (2017) e a Wirth & Barth (1992). Dut câs, achì o riclamìn che, te prime fase di costruzion de sô tele, il rai al cree une famee preliminâr di fîi circonferenziâi, clamade *spirâl ausiliarie*. I esperiments fats di Wirth & Barth (1992) a sapontin la ipotesi de proporzionalitât des pretrazions circonferenziâl e radiâl. Daûr di chês osservazions, o presuponìn

$$\overline{\tau}_\phi(\rho)=k\overline{\tau}_\rho(\rho), \qquad k>0 \quad \text{costante.} \tag{5.16}$$

Rimplaçant la (5.16) in te (5.15), e acetant la cundizion

$$\overline{\tau}_\rho(\rho = R) = \sigma, \qquad \sigma > 0 \quad \text{costante}, \tag{5.17}$$

sul contor de membrane elitiche, o otignìn

$$\overline{\tau}_\rho(\rho) = \widehat{T} e^{k\xi\rho}, \quad \rho \in [0, R], \tag{5.18}$$

dulà che $\widehat{T} = \sigma e^{-k\xi R} > 0$. Riclamant la (5.10) e la (5.14), la pretrazion che e agjìs su un singul fîl radiâl ($\overline{T}_\rho$) o elitic ($\overline{T}_\phi$) e je

$$\overline{T}_\rho = \widehat{T} e^{k\xi\rho} \sqrt{a^2 \cos^2\phi + b^2 \sin^2\phi}, \tag{5.19}$$

$$\overline{T}_\phi = k\widehat{T} e^{k\xi\rho} \sqrt{a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi}. \tag{5.20}$$

Te seconde fase de costruzion da la tele, il rai al gjave vie la spirâl ausiliarie e al zonte i fîi de *spirâl di cature* - o *spirâl tacadice.* Cheste configurazion e je chê finâl, de tele *finide* e lis ipotesis e argomentazions discutudis in Wirth & Barth (1992) a sugjerissin che la pretrazion da fîi elitics e pues jessi ipotizade tant che aprossimativementri costante, o ben

$$\overline{\tau}_\phi(\rho) = \mathcal{T} = \text{costante} > 0. \tag{5.21}$$

Cun lis (5.15) e (5.17), o otignìn

$$\overline{\tau}_\rho(\rho) = \widetilde{T} + \xi\mu\rho, \tag{5.22}$$

cun $\widetilde{T}$ tâl che $\widetilde{T} - \xi\mu R > 0$ e, duncje, cun lis (5.10) e (5.14), o otignìn

$$\overline{T}_\rho = (\widetilde{T} + \xi\mathcal{T}\rho) \sqrt{a^2 \cos^2\phi + b^2 \sin^2\phi}, \tag{5.23}$$

$$\overline{T}_\phi = \mathcal{T} \sqrt{a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi}. \tag{5.24}$$

O sierìn cheste sezion cuntun pâr di osservazions sul stât di pretrazion che si oten te tele finide. Riclamant lis nestris ipotesis gjeometrichis (2.4) e (2.5), di (5.23) e (5.24) al salte fûr che, intun fîl radiâl e intun fîl elitic, la fuarce di pretrazion e rive al nivel massim, rispetivementri, tai ponts $(X_1 = 0, X_2 = bR)$ $(\overline{T}_\rho^{\max} = \sigma b)$ e $(X_1 = aR, X_2 = 0)$ $(\overline{T}_\phi^{\max} = \mathcal{T} b)$; che si viodi la Figure 6. Indi ven daûr che si rive a la fuarce di trazion massime $\overline{T}_\rho$ tai fîi radiâi di lungjece massime e cheste proprietât e concuarde cu la necessitât di sigurâ la "uniformitât" de rigjidece de tele rispiet a lis fuarcis trasversâls. Cun di plui, tai fîi che a fasin part des dôs fameis, si rive al valôr massim di trazion in ponts diferents e chest al sugjerìs une distribuzion "otimâl" de pretrazion dentri de tele.

In conclusion, si ben che lis ipotesis *a priori* fatis tal derivâ il stât di pretrazion a sedin avonde fuartis, il risultât finâl al pâr resonevul e tes prossimis sezions lu doprarìn tal studi de rispueste dinamiche trasversâl al plan de tele.

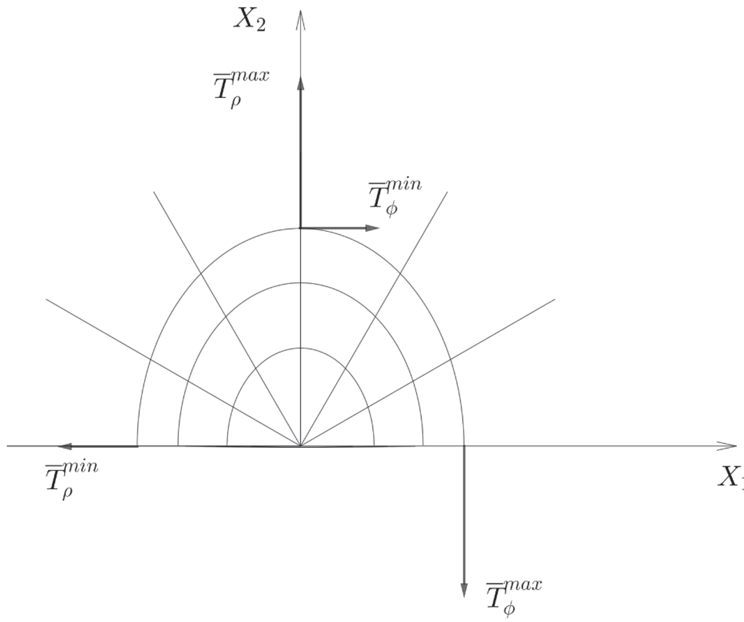

Figure 6: Valôrs minims e massims dal stât di pretrazion intune tele di rai cun spirâl tacadice.

6. Moviment trasversâl. Rimplaçant lis espressions (4.18) e (4.19) di N^{11} e N^{22} te ecuazion (4.14), daspò de liniarizazion o otignìn la ecuazion differenziâl che e guvierne il moviment trasversâl de membrane sot une fuarce trasversâl par unitât di aree p^3 (dentri a son ancje comprendudis lis fuarcis di inerzie):

$$\frac{C^\rho \overline{T}_\rho}{\rho ab\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} w_{,\rho\rho} + \frac{C^\phi \overline{T}_\phi}{\rho^2 ab\sqrt{a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi}} w_{,\phi\phi} + \\ + \frac{C^\phi \overline{T}_\phi}{\rho^2 ab\sqrt{a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi}} \rho w_{,\rho} + p^3 = 0, \tag{6.1}$$

o, in maniere ecuivalente, riclamant la (5.10) e la (5.14),

$$\frac{C^\rho}{\rho ab}\overline{\tau}_\rho w_{,\rho\rho} + \frac{C^\phi}{\rho^2 ab}\overline{\tau}_\phi (w_{,\phi\phi} + \rho w_{,\rho}) + p^3 = 0, \tag{6.2}$$

dulà che $\overline{\tau}_\phi$, $\overline{\tau}_\rho$, a son dâts di (5.16)-(5.18), (5.21)-(5.22) tal ordin pe tele cun spirâl ausiliarie e cun spirâl di cature.

Tal seguit o indagarìn un câs speciâl di (6.2), o ben, lis vibrazions trasversâls libaris de membrane elitiche supuartade tal contor,

$$u^3(R,\phi,t) = 0, \qquad (\phi,t) \in [0,2\pi] \times [0,\infty). \tag{6.3}$$

In chest câs, la funzion p^3 in (6.2) e coincît cu la densitât di superficie des fuarcis di inerzie fûr dal plan. Denotant, tal ordin, cun m_ρ e m_ϕ la densitât di masse lineâr costante dai fîi radiâi e dai fîi elitics, la densitât di masse di aree γ dal model continui e pues jessi determinade tant che $\gamma = \frac{dm}{dA}$, li che $dA = |\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2|\, d\rho\, d\phi = \rho ab\, d\rho\, d\phi$ e je la aree elementâr in $\mathcal{B}_k$ e dm e je la masse elementâr dai fîi che si cjatin in dA. Al ven fûr che

$$\gamma(\rho,\phi) = \frac{C^\rho}{\rho ab} m_\rho \sqrt{a^2 \cos^2\phi + b^2 \sin^2\phi} + \frac{C^\phi}{ab} m_\phi \sqrt{a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi} \tag{6.4}$$

e duncje, la ecuazion di moviment trasversâl e devente

$$\frac{C^\rho}{\rho ab} \overline{\tau}_\rho u^3_{,\rho\rho} + \frac{C^\phi}{\rho^2 ab} \overline{\tau}_\phi (u^3_{,\phi\phi} + \rho u^3_{,\rho}) - \gamma(\rho,\phi) u^3_{,tt} = 0, \tag{6.5}$$

par $(\phi,\rho,t) \in (0,2\pi) \times (0,R) \times (0,\infty)$. Stabilint

$$u^3 = w(\rho,\phi) y(t), \tag{6.6}$$

o podìn separâ lis variabilis (ρ,ϕ) de variabile timp t, otignint

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad t > 0, \tag{6.7}$$

e, doprant la (5.15),

$$(\overline{\tau}_\rho w_{,\rho})_{,\rho} + \lambda ab \widetilde{\gamma} w = -\frac{g}{\rho} w_{,\phi\phi}, \tag{6.8}$$

dulà che $\widetilde{\gamma} = \frac{\rho}{C^\rho}\gamma$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ al è l'autovalôr che al à di jessi determinât e

$$\begin{cases} k\xi\overline{\tau}_\rho \quad \text{(tele incomplete)}, & (6.9) \\ \xi\mu \quad \text{(tele finide)}. & (6.10) \end{cases}$$

La espression (6.4) de densitât di masse γ e preven la separazion tra la variabil radiâl ρ e la variabil angolâr ϕ. Sì che duncje, di chi indenant o din dome stimis, di sot e di parsore, dal autovalôr di (6.8) cu lis cundizions di contor (6.3). Al è facil dimostrâ che

$$\widetilde{\gamma}^-(\rho) \equiv a(m_\rho + \xi m_\phi \rho) \le ab\,\widetilde{\gamma} \le b(m_\rho + \xi m_\phi \rho) \equiv \widetilde{\gamma}^+(\rho), \tag{6.11}$$

e si à di notâ che lis variabilis ρ e ϕ a puedin jessi separadis in (6.8) cuant che $ab\widetilde{\gamma}$ al ven sostituît o di $\widetilde{\gamma}^-$ o di $\widetilde{\gamma}^+$. Considerìn, par esempli, il coeficient $\widetilde{\gamma}^+$. O podìn cirî une soluzion ae (6.8) (cun $ab\widetilde{\gamma}$ sostituît di $\widetilde{\gamma}^+$) de forme

$$w(\rho, \phi) = u(\rho)\Phi(\phi), \tag{6.12}$$

lì che, in gracie de regolaritât di w, $\Phi(\phi)$ e je une soluzion no banâl dal probleme ai autovalôrs

$$\begin{cases} \Phi'' + \nu^2\Phi = 0, & (6.13) \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi), & (6.14) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi), & (6.15) \end{cases}$$

e $u(\rho)$ e risolf

$$(\overline{\tau}_\rho u')' + \lambda^+\widetilde{\gamma}^+ u = \frac{\nu^2}{\rho} g u, \qquad \rho \in (0, R), \tag{6.16}$$

li che la funzion $g = g(\rho)$ e je definide di (6.9)-(6.10). Al è facilmentri dimostrabil che lis autocubiis di (6.13)-(6.15) a son

$$\nu_n^2 = n^2, \quad \Phi_n(\phi) = A\cos(n\phi) + B\sin(n\phi), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{6.17}$$

Se $n = 0$, alore $\nu_0 = 0$ e $\Phi_0(\phi)$ e je une costante diferent di zero. Lis autofunzions corispondentis w a son funzions dome de variabil ρ e a puedin jessi otignudis risolvint il probleme

$$\begin{cases} (\overline{\tau}_\rho u_0')' + \lambda_0^+\widetilde{\gamma}^+ u_0 = 0, \quad \rho \in (0, R), & (6.18) \\ u_0(R) = 0, & (6.19) \\ u_0'(0) = 0, & (6.20) \end{cases}$$

dulà che la condizion di contor (6.20) e vâl in mancjance di une fuarce concentrade te origjin O. Il probleme (6.18)–(6.20) al amet autovalôrs reâi sempliçs $\{\lambda_{0,j}^+\}_{j=1}^\infty$ tâi che

$$0 < \lambda_{0,1}^+ < \lambda_{0,2}^+ < ..., \quad \lim_{j\to\infty} \lambda_{0,j}^+ = +\infty. \tag{6.21}$$

Cuant che $n \geq 1$, lis autofunzions $u(\rho)$ in (6.12) a puedin jessi determinadis risolvint

$$\begin{cases} (\overline{\tau}_\rho u')' + \lambda_n^+ \widetilde{\gamma}^+ u = \frac{n^2}{\rho} g u, \quad \rho \in (0,R), & (6.22) \\ u(R) = 0, & (6.23) \\ u(0) = 0. & (6.24) \end{cases}$$

Par ogni n, $n \geq 1$, l'autovalôr dal probleme chi parsore al sarà indicât tant che $\{\lambda_{n,m}^+\}_{m=1}^\infty$, cun

$$0 < \lambda_{n,1}^+ < \lambda_{n,2}^+ < ..., \quad \lim_{m\to\infty} \lambda_{n,m}^+ = +\infty. \tag{6.25}$$

Al è di notâ che la cundizion di contor $u(0) = 0$ e garantìs di vê valôrs finîts de energjie di deformazion associade a la deformazion trasversâl $u = u(\rho)$.

In conclusion, la membrane elitiche cun densitât di masse $\widetilde{\gamma}^+$ tant che in (6.11) e à la secuence di autovalôrs $\{\lambda_{n,m}^+\}_{m=1}^\infty$, $n = 0, 1, 2, ...$ Se o ripetìn la analisi chi parsore cun $\widetilde{\gamma}^-$, o rigjavìn i autovalôrs $\{\lambda_{n,m}^-\}_{m=1}^\infty$, $n = 0, 1, 2, ...$ Par finî, su la fonde di un teoreme di monotonie, Courant & Hilbert (1965), o podìn stimâ di parsore e di sot i autovalôrs di (6.8). Par jessi plui precîs, ognidun dai autovalôrs $\{\lambda_{n,m}\}$ di (6.8) al è tâl che

$$\lambda_{n,m}(\widetilde{\gamma}^+) \leq \lambda_{n,m}(\widetilde{\gamma}) \leq \lambda_{n,m}(\widetilde{\gamma}^-). \tag{6.26}$$

La acuratece das stimis chi parsore e dipent clarementri dal rapuart $\frac{b}{a}$. Dut câs, par $\frac{b}{a} \in [1.1, 1.3]$ si spietisi che $\lambda_{n,m}(\widetilde{\gamma}^+)$, $\lambda_{n,m}(\widetilde{\gamma}^-)$ al ufrissi une buine aprossimazion dal autovalôr efetîf $\lambda_{n,m}(\widetilde{\gamma})$.

7. Deformazion tal plan. In cheste sezion o scrivìn lis ecuazions che a guviernin il compuartament mecanic tal plan de membrane elitiche. Un studi complet dal probleme des reazions tal plan nol jentre tai obietîfs di chest lavôr e al sarà ogjet di ricercjis futuris. Doprant lis ecuazions costitutivis (4.18), (4.19), tal ordin, par $N^{\rho\rho}$, $N^{\phi\phi}$, tai limits des ecuazions di ecuilibri (4.13), riclamant (5.10), (5.14) e passant a lis componentis cuintrivariantis, daspò de liniarizazion o rigjavìn

$$\begin{aligned} &\frac{C^\phi \overline{\tau}_\phi}{\rho^2 ab}[u^\rho_{,\phi\phi} - \rho u^\phi_{,\phi} - r_2(\rho^2 u^\phi_{,\rho} + \rho u^\phi) + r_1(u^\rho_{,\phi} - \rho u^\phi)] \\ &- \frac{C^\rho \overline{\tau}_\rho}{\rho ab} r_2(\rho u^\phi_{,\rho\rho} + 2u^\phi_{,\rho}) + \frac{C^\rho A_\rho E_\rho [u^\rho_{,\rho\rho} + r_2(\rho u^\phi_{,\rho\rho} + 2u^\phi_{,\rho})]}{\rho ab\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} + \\ &- \frac{C^\phi A_\phi E_\phi [u^\rho + \rho u^\phi_{,\phi} + r_1(u^\rho_{,\phi} - \rho u^\phi)]}{\rho^2 ab\sqrt{a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi}} + \gamma(\rho,\phi) u^\rho_{,tt} = 0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{C^{\phi}\overline{\tau}_{\phi}}{\rho^2 ab}\left[\rho u^{\phi}_{,\rho} + u^{\phi} + \frac{a^2b^2}{\rho}\frac{(u^{\rho}_{,\phi} - \rho u^{\phi})}{(a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi)^2}\right] + \\
&- \frac{C^{\phi}\overline{\tau}_{\phi}}{\rho^2 ab}\left[r_1^2\left(\frac{u^{\rho}_{,\phi}}{\rho} - u^{\phi}\right) - \frac{r_1}{\rho}(u^{\rho}_{,\phi\phi} - \rho u^{\phi}_{,\phi})\right] + \\
&+ \frac{C^{\phi}A_{\phi}E_{\phi}}{\rho^2 ab\sqrt{a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi}}\left[\frac{2}{\rho}u^{\rho}_{,\phi} - u^{\phi} + u^{\phi}_{,\phi\phi} + \frac{r_1}{r_2}\left(u^{\phi} - \frac{u^{\rho}_{,\phi}}{\rho}\right)\right] + \\
&+ \frac{C^{\phi}A_{\phi}E_{\phi}}{\rho^2 ab\sqrt{a^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi}}\left[\frac{r_1}{\rho}(u^{\rho} + u^{\rho}_{,\phi\phi} + 3r_1(u^{\rho}_{,\phi} - \rho u^{\phi}))\right] + \\
&+ \frac{C^{\rho}\overline{\tau}_{\rho}}{\rho ab}\left(u^{\phi}_{,\rho\rho} + \frac{2}{\rho}u^{\phi}_{,\rho}\right) + \gamma(\rho,\phi)u^{\phi}_{,tt} = 0,
\end{aligned} \tag{7.2}$$

li che A_{ρ}, A_{ϕ} a son, rispetivementri, lis areis des sezions di un singul fîl radiâl e di un singul fîl elitic e E_{ρ}, E_{ϕ} a son i modui di Young dal materiâl che al forme lis dôs fameis di fibris. Lis ecuazionss (7.1) e (7.2) a esprimin l'ecuilibri dinamic pes vibrazions infinitesimâls libaris, rispetivementri in direzion radiâl e in direzion angolâr.

8. Conclusions. La formulazion di modei mecanics de rispueste dinamiche des telis di rai tai ultins agns e à stiçât un interès cressint, par vie des sôs implicazions tai studis dal compuartament dai rais. Morassi, Soler and Zaera (2017) a àn proponût un model continui a membrane struturade pretensionade des telis di rai circolârs. Il model al è stât disvilupât su la ipotesi di une tele a gjeometrie assiâl simetriche e di deformazions piçulis. L'obietîf principâl di chest contribût al è chel di aplicâ chê stesse metodiche a lis telis di rai di forme elitiche. Par disvilupâ cheste estension al è coventât introdusi un ciert numar di ipotesi *a priori* adatis par determinâ un stât di pretension amissibil te configurazion di riferiment. Chest lavôr al è un prin pas viers il studi di telis di rai di gjeometrie plui realistiche cuntun sôl as di simetrie.