Gjornâl Furlan des Siencis **24**. 2017, 149-229

# Teorie dai numars indiçs*

MARZI STRASSOLT

**1. Introduzion. I metodis di eliminazion.** Dute la metodologjie statistiche, massime chê aplicade ae analisi dai fenomens economics, si pas di procediments adats a fâ saltâ fûr regolaritâts o aspiets struturâi de variabilitât o covariabilitât des manifestazions empirichis. Une volte individuâts, chescj procediments a dan la pussibilitât di slargjâ la capacitât interpretative de realtât. Ducj i metodis statistics a son stâts regolâts cul obietîf di jentrâ a fonts intune realtât in dut câs complesse, che la sô comprension e je fluscade di fonts infinidis di variabilitât che si zontin ai elements, aes relazions, ai compuartaments struturâi di un sisteme ogjet di studi.

Soredut tai ambits dissiplinârs li che pe cognossince no si pues in pratiche zovâsi dai struments di verifiche dâts de sperimentazion, par cjatâ regolaritâts di compuartament, analogjiis o diferencis di procès, nature e carateristichis di leams causâi diferenziâts, si scuen lâ indenant pe strade de eliminazion progressive di aspiets e circostancis che a scurissin la essence dai fenomens par vie di erôrs di misure, di ossilazions casuâls, di variazions di fenomens concomitants, di struments di osservazion che a rapresentin la realtât in maniere no omogjenie, di diferencis di dimensions, di cuvierture scjarse dal cjamp di osservazion.

Tal cjamp dai fenomens economics, lis pussibilitâts di cognossince dal reâl a son inderedadis no dome des cundizions dadis di ogni dimen-

* Estrat di Strassoldo M. (1996). Teoria dei numeri indici dei prezzi. In Strassoldo M., Mattioli E., Schifini S. (Eds) *Teoria dei numeri indici dei prezzi e degli indicatori economici, finanziari e sociali*. Padova: Cedam.

sion de realtât, tant che i erôrs di misure, lis variazions concomitantis, la impussibilitât di scandaiâ la totalitât dai câs che a dan dongje i fenomens di interès, ma ancje di altris doi aspiets fondamentâi: il prin al è dât de eterogjeneitât estreme des unitâts di misure, che tal câs dal metri monetari a àn il fastidi di jessi variabilis no dome tal spazi ma ancje tal timp; il secont aspiet al è dât de diference cetant grande di dimension dai sistemis o dai grups economics, che dome comparantju tra di lôr si pues pensâ di lâ indenant tes cognossincis, considerâts i limits tal doprâ la sperimentazion dâts de nature stesse dai fenomens sociâi.

Lis ricercjis di economie a doprin procediments di confront jenfri i compuartaments di sistemis economics scrutinâts in cundizions diferentis, di mût di individuâ i leams causâi e lis regolaritâts di compuartament pussibii daûr di cundizions omogjeniis. Chescj confronts a son rindûts mancul facii par vie de gruesse variabilitât des unitâts di misure e dai nivei cjapâts dai fenomens a seconde des diviersis dimensions dai sistemis considerâts.

I metodis di eliminazion preliminârs a ducj chei altris aprofondiments su regolaritât di compuartament, conessions causâls, dinamichis evolutivis e trasformazions struturâls, a integnin duncje la riduzion a tiermins comparabii di grandecis economichis studiadis in diviersis cundizions di timp, spazi, categorie e unitât di misure.

Lis grandecis economichis si cjatilis intune molteplicitât di unitâts di misure fisiche, che a son diviersis o pe nature stesse dal fenomen (pês, volum, estension e v.i.) o pal sisteme di misure diferent (in mancjance di un sisteme di misure unic, adat par dutis lis realtâts economichis). A nivel di marcjât, si pues misurâ lis grandecis stessis tal metri monetari, che al presente la carateristiche di jessi une vore eterogjeni tal spazi in dipendence dai diviers sistemis di formazion e control dal numerari. Cun di plui, chest metri al subìs une modificazion in pratiche permanente de sô capacitât di misure a seconde di ritmis che a dipendin ancjemò di cundizions di funzionament dai diviers sistemis economics.

Se scrutinadis sot di profîi comparatîfs, lis grandecis economichis, e massime chês che si palesin in bens e servizis singui o agregâts, a àn duncje bisugne di jessi liberadis di chei elements di disturp che a son dâts di unitâts di misure diviersis e di ordins di grandece diferents, che a son peâts il plui des voltis, ma no dome, a circostancis di nature istituzionâl. Si à di podê comparâ lis grandecis esprimudis in unitâts di misure fisiche (cuantitât) e chês esprimudis in unitâts monetariis (valôrs), midiant de eliminazion de unitât di misure o de conversion intune unitât di misure uniche (cuant che al è pussibil). Ancje lis grandecis che si riferissin o che a vegnin di unitâts economichis o di agregâts di unitâts economichis di dimension diferente o di numerositât diferente a àn di jessi tradusudis in tiermins di ordins di grandece che si puedin comparâ, midiant di procediments di relativizazion che si esprimin traviers di valôrs unitaris (mediis o rapuarts).

Al nas cussì il probleme de costruzion di chê classe particolâr di rapuarts statistics che a son i numars indiçs, o ben cuozients di grandecis economichis esprimudis te stesse unitât di misure.

## 2. I numars indiçs elementârs

*2.1. Definizion.* Considerìn un fenomen economic, elementâr o risultât di agregazion, di nature micro o macro economiche, misurât secont une cierte unitât di misure, che o indicarìn cun $X$. Chest al vignarà studiât par une sucession di timps, di teritoris o di categorie. Indichìn cun $x_t$ la grandece gjeneriche, cun $t = 0, 1, 2,\dots T$, jessint $x_t > 0$.

L'intindiment al è di costruî une misure des variazions relativis che a dedin la pussibilitât di fâ un confront cuntun fenomen analic che si riferìs, par altri, a un altri sisteme economic o che al è esprimût cuntune altre unitât di misure. Cjapant duncje in considerazion doi tiermins de serie $x_t$ e $x_b$, che a dan dongje il vetôr $x = (x_b, x_t)'$, si varà di costruî une lôr funzion:

$$ {}_bI_t = I(x_b, x_t) \tag{2.1} $$

che e sodisfi un sisteme di cundizions definît cussì:

*a.1. Normalizazion.* Se lis dôs grandecis a son compagnis ae unitât, la funzion e devente unitarie:

$$ I(x_b, x_t) = 1 \qquad (x_b = x_t = 1) \tag{2.2} $$

*a.2. Adimensionalitât.* Une trasformazion di scjale e, pe precision, di unitât di misure no modifiche il valôr de funzion (omogjeneitât di grât zero):

$$I(\lambda x_b, \lambda x_t) = I(x_b, x_t) \qquad (\lambda > 0) \tag{2.3}$$

*a.3. Omogjeneitât.* La funzion e cambie in maniere proporzionâl a di un fatôr di scjale λ, se $x_t$ e cambie inte stesse proporzion:

$$I(x_b, \lambda x_t) = \lambda\, I(x_b,\, x_t) \qquad (\lambda > 0) \tag{2.4}$$

Al è facil viodi che lis primis trê cundizions a implichin une funzion che e je dade dal cuozient dai doi tiermins.

Di fat, si pues scrivi:

$$\begin{aligned} I(x_b, x_t) &= I\{x_b(x_b / x_b),\ x_t(x_b / x_b)\} = \\ &= I\{x_b, x_b(x_t / x_b)\} = \\ &= I\{1, x_t / x_b\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

che si verifiche pes cundizions di adimensionalitât. Pe omogjeneitât al vignarà fûr:

$$I\{1, x_t / x_b\} = x_t, x_b\ I\{1,1\} \tag{2.6}$$

e duncje pe cundizion di normalizazion al sarà:

$$I(x_b,\, x_t) = x_t / x_b \tag{2.7}$$

Se si rapuarte ogni tiermin $x_t$ de serie al tiermin stes, che al reste costant, si met dongje une serie di *numars indiçs a base fisse*. Ognidun di chescj al è moltiplicât pal plui par 100, creant dai *numars indiçs percentuâi*. Si varà duncje une serie li che il tiermin gjeneric al è dât (a mancul dal coeficient 100) di:

$${}_bI_t = x_t / x_b \tag{2.8}$$

Chest al esprim la variazion relative che si verifiche jenfri *b* e *t*, che si pues esprimi sedi in tiermins di numar indiç, o di fatôr di variazion, o di capitalizazion se si riferissisi a un tiermin cjapât dai fenomens finanziaris, sedi in tiermins di «tas di variazion» che al è dât dal numar indiç diminuît de unitât. Cun di fat:

$$i(b,t) = (x_t - x_b)/x_b = (x_t/x_b) - 1 = {}_bI_t - 1 \tag{2.9}$$

Se la serie considerade e je une serie storiche, come che si assumarà ca di pôc, a mancul che no si fasi riferiment di pueste a seriis spaziâls, il numar indiç a base fisse, indulà che *b* al è diviers di *(t* – 1*)*, al permet di rigjavâ ae svelte un tas medi di variazion pal periodi cjapât dentri di *b* e *t*. Come che o savìn, chest tas si calcole in maniere corete midiant de medie gjeometriche, daûr de cundizion di invariance dal prodot dai fatôrs di variazion, riferîts a ognidun dai sotperiodis:

$$i^*(b,t) = \left({}_bI_t\right)^{1/(t-b)} - 1 \tag{2.10}$$

Al è clâr che si pues mudâ une serie di numars indiçs cuntune cierte base fisse *b* intune gnove serie cun basse fisse *c*, rapuartant ogni tiermin de serie par un tiermin singul riferît a un timp *c*. Di fat:

$${}_cI_t = {}_bI_t / {}_bI_c = \left(x_t / x_b\right) / \left(x_c / x_b\right) = x_t / x_c \tag{2.11}$$

Se ognidune des grandecis $x_t$ de serie *X* no je metude in relazion cuntun tiermin che al reste costant, ma ben cul tiermin precedent $x_{t-1}$, si varà tant che risultât la serie dai *numars indiçs a base mobile* che a metin in evidence lis variazions relativis che si verifichin in ognidun dai intervai che a dan dongje la serie storiche. Si varà, duncje:

$${}_{t-1}I_t = x_t / x_{t-1} \tag{2.12}$$

I numars indiç a base mobile si puedin rigjavâ in maniere direte de serie dai numars indiçs a base fisse, cence scugnî passâ pe serie origjinarie *X*. Di fat, al baste rapuartâ ogni numar indiç a base fisse al so tiermin precedent:

$${}_bI_t / {}_bI_{t-1} = {}_{t-1}I_t \tag{2.13}$$

Te stesse maniere, si pues tornâ a costruî ogni tiermin di une serie di numars indiçs a base fisse moltiplicant ducj i numars indiçs a base mobile cjapâts dentri tra il timp base e il timp considerât. Di fat:

$$ {}_{b}I_{t} = {}_{b}I_{b+1}\ {}_{b+1}I_{b+2}\cdots{}_{t-1}I_{t} \tag{2.14} $$

Cheste relazion e met in lûs il parcè che il numar indiç a base fisse par un periodi che al cjape dentri plui intervai di timp al rapresente la cundizion di ecuivalence che e puarte al calcul dal tas medi di variazion midiant de medie gjeometriche.

*2.2. Proprietâts dai numars indiç elementârs.* Lis cundizions assiomatichis imponudis pe costruzion di une misure adimensionâl des variazions, lis proprietâts algjebrichis dal rapuart jenfri dôs grandecis di une stesse serie e lis relazions jenfri serie a base fisse e serie a base mobile nus dan la pussibilitât di definî un insiemi di proprietâts dai numars indiçs elementârs che al è par sigûr zovevul ancje dal pont operatîf e pal calcul.

Cualchidune di chestis proprietâts e je juste une formulazion diferente des cundizions assiomatichis za presentadis, intant che altris a son implicadis des stessis o a saltin fûr di une esplicazion des proprietâts algjebrichis dai cuozients.

Lis proprietâts a son chestis:

*b.1. Identitât.* Il numar indiç riferît al timp base al è avuâl ae unitât:

$$ {}_{b}I_{b} = x_{b} / x_{b} = 1 \tag{2.15} $$

Cheste proprietât e je une formulazion diferente dal assiome de normalizazion.

*b.2. Comensurabilitât.* Il numar indiç al è un numar pûr, insensibil aes trasformazions di scjale e massime ai cambiaments de unitât di misure.

Cun di fat:

$$ {}_{b}I_{t} = \lambda x_{t} / \lambda x_{b} = x_{t} / x_{b} \tag{2.16} $$

E je la cundizion assiomatiche di adimensionalitât di indulà che si à rigjavât il numar indiç.

*b.3. Proporzionalitât.* Se la grandece metude a confront e mude a seconde di un coeficient λ, il numar indiç al misure cheste proporzion:

$$ {}_bI_t = \lambda x_b / x_b \qquad x_t = \lambda x_b \tag{2.17} $$

*b.4. Monotonicitât.* Il numar indiç al è une funzion cressinte strentementri rispiet a $x_t$ e decressinte strentementri rispiet a $x_b$:

$$ I(x_b, x_t) < I(x_b, x_t + c) \qquad (c > 0) \tag{2.18} $$

$$ I(x_b + d, x_t) < I(x_b, x_t) \qquad (d > 0) \tag{2.19} $$

*b.5. Reversibilitât des basis.* Il numar indiç dal timp *t* di base *b* al è avuâl al reciproc dal numar indiç calcolât al timp *b* cun base *t*:

$$ {}_bI_t = 1 / {}_tI_b \tag{2.20} $$

che si pues scrivi ancje:

$$ {}_bI_t\,{}_tI_b = (x_t / x_b)(x_b / x_t) = 1 \tag{2.21} $$

*b.6. Circolaritât.* Dâts doi indiçs, un di base *b* al timp *r* e chel altri di base *r* al timp *t*, chescj doi a gjoldin de proprietât di circolaritât o di transitivitât se il lôr prodot nus permet di rigjavâ un numar indiç di base *b* al timp *t*:

$$ {}_bI_r\,{}_rI_t = {}_bI_t \tag{2.22} $$

Si pues dimostrâlu intun moment viodint che:

$$ (x_r / x_b)(x_t / x_r) = x_t / x_b \tag{2.23} $$

Si viôt subite che cheste proprietât e impliche chê di identitât tal câs che $r = b$ e de reversibilitât tal câs che $b = t$.

*b.7. Decomponibilitât rispiet al prodot.* Cjapant in considerazion une grandece dade dal prodot di dôs grandecis elementârs, il numar indiç de grandece prodot al è avuâl al prodot dai numars indiçs des grandecis che le componin:

$$ {}_{b}I_{t(xy)} = {}_{b}I_{t(x)}\, {}_{b}I_{t(y)} \tag{2.24} $$

Cun di fat, si verifiche subite che:

$$ {}_{b}I_{t(xy)} = x_t y_t / x_b y_b = (x_t / x_b)(y_t / y_b) \tag{2.25} $$

Al è clâr che cualchidune di chestis proprietâts semplicis a son une vore interessantis soredut par une semplificazion des operazions di calcul. La proprietât de reversibilitât e chê de circolaritât, par esempli, nus permetin di fâ dute une schirie di operazions cence scugnî doprâ i dâts origjinaris. Daûr de reversibilitât, si pues meti in vore il «slitament» de base, che si rigjave cun facilitât dividint un tiermin de serie dai numars indiçs a base fisse cuntun altri tiermin, creant cussì une gnove base. La circolaritât nus permet operazions di «concatenazion», che a dan la pussibilitât di passâ di une serie di numars indiçs a base mobile a di une altre serie a base fisse. La decomponibilitât nus permet di identificâ l'apuart ae variazion totâl che al ven de variabilitât des singulis componentis che si compuartin in maniere moltiplicative. E vie indenant.

*2.3. La costruzion di numars indiç elementârs.* La sielte de base e rispuint no tant a cuistions peadis ae normalitât pretindude dal interval di considerâ, ma ben ai obietîfs li che si à voie di rivâ cu la costruzion dal numar indiç e in particolâr al an o al mês che par chei si vûl marcâ lis variazions. La prassi plui doprade e vûl che la base e sedi fate coincidi cul tiermin iniziâl de serie storiche e duncje $b = 0$.

Problemis plui dificii a saltin fûr tal câs che te serie storiche a jentrin dai erôrs sistematics, par colpe des revisions tai criteris di definizion e di costruzion des grandecis, di modificazions dal grât di cuvierture des indagjins di li che e salte fûr la serie, o pûr par erôrs di osservazion e di campionament che a puedin ancje lôr lâ daûr dai modei probabilistics che si evolvin tal timp.

Tal câs di erôrs di campionament si varà di zovâsi, cu la cautele dal câs, di informazions che a vegnin dal numar indiç che al nas di un erôr di stime costante peât ae grandece di base e a erôrs des grandecis di riferiment causâts di erôrs di stime variabii tal timp, dal moment che si varès di costruî za di prime il margjin di erôr.

## 3. I numars indiçs componûts

*3.1. Premesse.* Lis esigjencis de ricercje economiche a puedin jessi sodisfatis di rârt midiant de analisi de variabilitât di un fenomen singul, considerât par so cont. Cun di plui, bisugne considerâ che il stes fenomen economic dificilmentri al fâs riferiment a un flus elementâr e origjinari di bens, servizis o di operazions, jessint lui stes cuasi simpri il risultât di procediments di agregazion, ancje cuant che si riferìs a ativitâts di consum, di ingrum o di produzion di une singule unitât economiche. Il consum di un gjenar alimentâr di bande di une famee te unitât di timp, par esempli, al è simpri il risultât de agregazion di plui ats di acuist, la produzion di un ciert ben di bande di une imprese te unitât di timp e je simpri il risultât de ativitât di plui reparts e e je scuasit simpri il risultât di une agregazion tal timp e vie indenant. A ogni mût, da rârt la ricercje di nature sientifiche o operative e pues jessi sodisfate midiant di une analisi de variabilitât tal timp (o tal spazi) de cuantitât, dal valôr o dal presit di un ben o servizi singul: concludude cheste analisi, e saltarà fûr clare e taronde la dibisugne di considerâle intun contest plui slargjât di variabilitât e di covariabilitât di altris bens e servizis e di altris grandecis economichis. Si à cussì il probleme de costruzion di numars indiçs componûts che a saltin fûr de agregazion di numars indiçs elementârs o che si riferissin a agregâts che indi si vûl meti in lûs i contribûts di une sole componente elementâr. Nol è il câs di introdusi in cheste sede distinzions di terminologjie, che a cjapin dentri, par esempli, lis definizions di March (1923)[1], che al marche la diference jenfri numars indiçs sempliçs, sintetics e componûts o jenfri batariis di grandecis, a seconde che a fasedin riferiment a fenomens ugnui, o pûr a pluralitât di fenomens, esprimûts te stesse unitât di misure (e duncje che si puedin agregâ par sume) o in misure divierse (e duncje che no si puedin sumâ). Par cumò, al baste dicerni jenfri numars indiçs elementârs (o sempliçs), tal câs che a sedin costruîts dome midiant rapuarts tra tiermins de stesse serie (e duncje omogjenis par unitât di misure) e numars indiçs componûts (o sintetics, o complès) tal câs che a sedin il risultât de agregazion di numars indiçs elementârs.

Metìn di vê une pluralitât di bens, di servizis, o di altris grandecis economichis scrutinâts in stâts temporâi diferents (ma a podaressin ancje jessi dimensions diferentis di spazi o di categorie). La grandece gjeneriche e sarà indicade cun $x_{th}$, indulà che $t = 1, 2, \ldots, T$, intant che $h = 1, 2, \ldots, H$ e rapresente l'element gjeneric di une matriç $X$, che lis sôs riis a àn par intestazion i timps e lis colonis lis grandecis elementârs:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1h} & \cdots\cdots & x_{1H} \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ x_{t1} & x_{t2} & \cdots\cdots & x_{th} & \cdots\cdots & x_{tH} \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ x_{T1} & x_{T2} & \cdots\cdots & x_{Th} & \cdots\cdots & x_{TH} \end{bmatrix} = \left[x_{1} \ldots\ldots x_{\cdot H}\right] = \begin{bmatrix} x_{1}.' \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{t}.' \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{T}.' \end{bmatrix}$$

Cjapant un cualsisei timp $t = b$ tant che base, e si rapuarte ogni element di ognidun dai vetôrs colone $x_{th}$ al element dal timp di base che i corispuint, si à tant che risultât la matriç ${}_bI_t$ dai numars indiçs elementârs ${}_bI_{th}$:

$${}_bI_t = \begin{bmatrix} {}_bI_{11} & {}_bI_{12} & \cdots\cdots & {}_bI_{1h} & \cdots\cdots & {}_bI_{1H} \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ {}_bI_{t1} & {}_bI_{t2} & \cdots\cdots & {}_bI_{th} & \cdots\cdots & {}_bI_{tH} \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ {}_bI_{T1} & {}_bI_{T2} & \cdots\cdots & {}_bI_{Th} & \cdots\cdots & {}_bI_{TH} \end{bmatrix}$$

Tal câs che i vetôrs colone singui a sedin compagns, un cualsisei numar indiç al podarès jessi cjapât come rapresentatîf di chei altris. Te realtât ogni grandece, par trop che le si meti in relazion cun chês altris o che e vedi grâts elevâts di omogjeneitât rispiet al complès des variabilis consideradis, e varà un so profîl di evoluzion tal timp. Par motîfs di nature teoriche e operative, si à il probleme di costruî une misure di sintesi che e pandedi lis variazions relativis par grups intîrs di grandece o pe totalitât dal coletîf di grandecis consideradis.

Par esempli, se i vetôrs a fasin riferiment a vôs singulis di spese par bens di consum, si podarès volê cognossi i ritmis di variazion di classis particolârs di spese (mangjâ, vistî, mobilie, culture e istruzion, traspuarts e v. i.) o de totalitât des vôs di spese consideradis (spese totâl). Se lis variabilis a son riferidis ae ocupazion o aes oris lavoradis tes industriis classificadis a nivel di categoriis, al pues jessi interessant costruî dai indiçs di produzion o de ocupazion industriâl che a fasin riferiment rispetivementri a classis e brancs di ativitâts economichis o pûr a dut il setôr industriâl.

Si à duncje il probleme di lâ indenant te costruzion di numars indiçs agregâts, che si podedin calcolâ daûr di dôs stradis fondamentâls:

a) par agregazion di variabilis;
b) par agregazion di numars indiçs.

La prime strade e mene al cussì clamât metodi dal rapuart jenfri agregâts che, tal câs che lis variabilis a sedin omogjeniis par chel che al inten la unitât di misure, al puarte ae costruzion di un numar indiç elementâr calcolât no plui su grandecis elementârs ma ben su grandecis scomponibilis in componentis aditivis.

La seconde strade si pues tradusile intune schirie di procediments, ancje lôr di podê diferenziâ in: $b_1$) agregazion par medie; $b_2$) agregazion a seconde de struture di variabilitât e covariabilitât o ben midiant di tecnichis multivariadis.

*3.2. Rapuarts di agregâts.* Se la matriç dai dâts e je dade di grandecis origjinariis esprimudis te stesse unitât di misure, la maniere principâl par costruî un numar indiç componût e je chê di une agregazion semplice dai tiermins par ognidun tai timps $t$, di mût di rigjavâ un valôr totâl, di rapuartâ, dopo, al totâl costruît pal timp base *b*. Lant indenant par cheste strade, il probleme de agregazion di numars indiçs elementârs si disberdee te costruzion di un numar indiç elementâr gnûf, che no si riferìs aes componentis elementârs ma ben ae grandece agregade Σ. Si varà duncje:

$$ {}_b I_{t(\Sigma)} = \Sigma x_{th} / \Sigma\, x_{bh} = tr < x_{t.} > / tr < x_{b.} > = s_t / s_b \qquad (3.1) $$

indulà che cul operadôr segn si oten la grandece scalâr s che e je avuâl al risultât di une operazion di agregazion par sume (tipiche dai consums alimentârs, che a nassin de sume des spesis par ognidun dai bens, o de produzion industriâl, che e je l'agregât des cuantitâts di un numar grant di prodots di trasformazion) par un ciert moment temporâl di riferiment.

Cheste vie di agregazion e je stade proponude ancje par variabilis che no son aditivis, parcè che grandecis derivadis, come tal câs dai presits, o parcè che di nature diferente (par esempli bens licuits e solits) e duncje esprimûts in unitâts di misure diferentis dal dut. In chest secont câs, si pues lâ indenant te agregazion dome dopo di une juste trasformazion des unitâts di misure. Tal câs di grandecis omogjeniis par nature, ma diviersis par unitât di misure, si varà dome di mudâ un sisteme metric intun altri, che al varà di jessi comun. Tal câs di grandecis di nature diferente, bisugnarà convertîlis intun altri sisteme di unitât di misure, dal dut diferent, ven a stâi chel monetari, mudant lis cuantitâts in valôrs, midiant di un sisteme di presits.

La agregazion midiant di un rapuart di agregâts di nature o di misure diferente e fâs saltâ fûr un indiç dificil di interpretâ e che al esprim in maniere pôc clare lis dinamichis evolutivis singulis. Chest al è causionât sedi de mancjance di un significât economic propri di agregâts esprimûts in unitâts di misure eterogjeniis, sedi dal fat che si da plui rilêf aes variazions des variabilis che a cjapin un ordin di grandece maiôr rispiet a chês che a àn un pês cuantitatîf minôr (ma dut câs no di mancul valôr o impuartance).

Lis proprietâts di un indiç rigjavât par agregazion direte des grandecis di riferiment a son lis stessis di chês za metudis in lûs pai numars indiçs elementârs.

*3.3. Mediis di numars indiçs elementârs.* La seconde strade par costruî un numar indiç che al misuredi lis variazions relativis e je chê di doprâ une des mediis sugjeridis de metodologjie statistiche par mudâ un vetôr di valôrs intune grandece scalâr che e sedi indipendente de dimension dal vetôr stes.

In sostance, bisugne valêsi di une medie gjeneralizade o medie di potencis di ordin $r$, sieltis in maniere zovevule a seconde de cundizion di ecuivalence imponude dai obietîfs che il numar indiç componût al à di apaiâ:

$$ {}_bI_{t(M_r)} = M_r\left\{{}_bI_{t.}\right\} = \left\{{}_bI_{th}{}^r / H\right\}^{1/r} = \left\{\Sigma\left(x_{th} / x_{bh}\right)^r / H\right\}^{1/r} \tag{3.2} $$

Valôrs specifics di $r$ a dan lis mediis singulis che par solit e sugjerìs la leterature:

par $r = 1$ si à la medie aritmetiche:

$$ {}_bI_{t(M_1)} = M_1\left\{{}_bI_{t.}\right\} = \Sigma\, {}_bI_{th} / H = \Sigma\left(x_{th} / x_{bh}\right) / H \tag{3.3} $$

La cundizion di ecuivalence che e justificarès l'ûs di cheste medie e je dade de sume, che no si pues ipotizâ par une variabile che e nas dal rapuart di altris variabilis omogjeniis. Si pues justificâ il fat di doprâ la medie aritmetiche ancje in altris manieris, in riferiment a une cundizion di aprossimazion sugjeride de ipotesi che ognidun dai numars indiçs elementârs al sedi une misure divierse di un rapuart unic e che duncje al sedi une determinazion di une variabil causâl normâl, secont une concezion di tip «atomistic» che e vignarà spiegade miôr plui indenant. Al è clâr che chest indiç cussì componût al gjolt di dutis lis proprietâts definidis de medie aritmetiche: la nulitât de sume dai scarts, la minimizazion de sume dai scarts al cuadrât, la omogjeneitât, la traslativitât, la associativitât;

par $r \to 0$ si à la medie gjeometriche:

$$ {}_bI_{t(M_0)} = M_0\left\{{}_bI_t\right\} = \left\{\Pi\, {}_bI_{th}\right\}^{1/H} = \left\{\Pi\left(x_{th} / x_{bh}\right)\right\}^{1/H} \tag{3.4} $$

La cundizion di ecuivalence che e justifiche l'ûs de medie gjeometriche e je dade de invariance dal prodot, che e somee adatâsi miôr aes carateristichis de variabil che, jessint dade di cuozients, no si compuarte par sigûr in maniere aditive. Il numar indiç costituît su la fonde de medie gjeometriche al presente cualchi proprietât zovevule pes operazions di slitament de base e di concatenazion di numars indiçs a base mobile. Cun di fat:

i) la medie gjeometriche di rapuarts e je avuâl al rapuart des mediis gjeometrichis de grandece al numeradôr e di chê al denominadôr, fat che al sclarìs cemût che, metint in vore cheste medie, il metodi dal rapuart jenfri agregâts e chel de medie dai numars indiçs elementârs a van parie; cun di fat:

$$M_0\left\{< x_{b.} >^{-1} x_{t.}\right\} = \left\{\Pi\left(x_{th} / x_{bh}\right)\right\}^{1/H} = \left\{\Pi x_{th}\right\}^{1/H} / \left\{\Pi x_{bh}\right\}^{1/H} = \\ = M_0\left\{x_{t.}\right\} / M_0\left\{x_{b.}\right\} \tag{3.5}$$

Cheste proprietât e permet ancje di calcolâ cun plui facilitât numars indiçs componûts di base diverse, tacant prime cu la sostituzion di ogni vetôr riferît a un ciert timp *t* cu la rispetive medie gjeometriche des grandecis, par dopo lâ indenant cul calcul dal numar indiç di base desiderade, midiant dal calcul di un rapuart jenfri mediis gjeometrichis. Si pues ancje zovâsi di cheste proprietât par fâ operazions di concatenament, par esempli:

$${}_bI_{r(M_0)}\,{}_rI_{t(M_0)} = {}_bI_{t(M_0)} \tag{3.6}$$

di fat:

$$= M_0\left\{< x_{r.} >^{-1} x_{t.}\right\} M_0\left\{< x_{b.} >^{-1} x_{r.}\right\} = \left(M_0\left\{x_{t.}\right\} / M_0\left\{x_{r.}\right\}\right)\left(M_0\left\{x_{r.}\right\} / M_0\left\{x_{b.}\right\}\right) \\ = M_0\left\{x_{t.}\right\} / M_0\left\{x_{b.}\right\} \tag{3.7}$$

ii) la potence di grât s de medie gjeometriche e je avuâl ae medie gjeometriche des potencis di grât s dai tiermins:

$$\left(M_0\left\{< x_{b.} >^{-1} x_{t.}\right\}\right)^s = \left(\left\{\Pi\left(x_{th} / x_{bh}\right)\right\}^{1/H}\right)^s = \\ = M_0\left\{< x_{b.}{}^s >^{-1} x_{t.}{}^s\right\} \tag{3.8}$$

iii) il reciproc de medie gjeometriche al è avuâl ae medie gjeometriche dai reciprocs:

$$\begin{aligned} 1/M_0\left\{<x_{b.}>^{-1}x_{t.}\right\} &= 1/\left\{\Pi\left(x_{th}/x_{bh}\right)\right\}^{1/H} = \\ &= 1/\left(\left\{\Pi x_{th}\right\}^{1/H}/\left\{\Pi x_{bh}\right\}^{1/H}\right) = \\ &= M_0\left\{<x_{b.}>x_{t.}^{-1}\right\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Cheste proprietât, derivade de precedente ponint $s = -1$ e je par sigûr zovevule cuant che bisugne scambiâ la base $b$ cul timp di riferiment $t$; si viodarà plui indenant che i numars indiçs componûts che si fondin su la medie gjeometriche a sodisfin la plui part des proprietâts formâls, che a son stadis proponudis pai numars indiçs dai presits di Fisher (1922)[2] e di altris, tant che la identitât, la reversibilitât des basis, la circolaritât, la comensurabilitât e la proprozionalitât;

par $r = -1$ si à la medie armoniche:

$${}_bI_{t(M_{-1})} = H/\Sigma\left(x_{bh}/x_{th}\right) \tag{3.10}$$

tal câs de medie armoniche, la cundizion di ecuivalence e je dade de sume dai reciprocs, e e va duncje aplicade in maniere plui adate aes variabilis che si compuartin in maniere aditive rispiet ae sume dai reciprocs dai tiermins. Par chel che al inten lis proprietâts, chestis si rigjavilis di chês de medie aritmetiche, considerant che la medie armoniche si rigjavile di une medie aritmetiche, ancje se riferide ai reciprocs des grandecis di mediâ; par chestis resons al è râr che e vegni doprade par costruî numars indiçs componûts.

*3.4. Agregazion midiant di tecnichis multivariadis.* Si pues rigjavâ la agregazion dai numars indiçs elementârs no dome aplicant un operadôr medi dal câs, ma ancje doprant une des tantis tecnichis multivariadis proponudis de metodologjie statistiche. Chescj procediments a son stâts definîts par risolvi cuistions analighis e a son dâts de riduzion des dimensions di un probleme o, in altris tiermins, de trasformazion di grandecis vetoriâls o di matriçs in grandecis scalârs in grât di costruî misuris di sintesi adatis.

La analisi multivariade e furnìs struments adats di agregazion di cetantis variabilis, su la fonde di une juste elaborazion de struture di variabilitât e covariabilitât de matriç dai numars indiç elementârs che si riferissin a *H* bens e a (*T*+1) timps.

Se si considere ogni numar indiç tant che une variabil distinte, e si à chê di meti in jessi un procediment sempliç di agregazion, la tecniche plui adate di aplicâ e somee chê des componentis principâls. Se la variabilitât e je ben spiegade, si pues considerâ la prime componente principâl gjavade fûr de matriç dai dâts tant che il numar indiç componût che si cirive.

Simpri se si considere ogni numar indiç tant che une variabil, si pues procedi te agregazion doprant la analisi fatoriâl, indulà che si pues tignî il prin fatôr tant che indiç sintetic che al va considerât ae stesse maniere di une variabil latente. Cheste e contribuìs in grât massim ae spiegazion de variabilitât di ognidun dai indiçs elementârs, che si puedin considerâ tant che manifestazions parziâls e singulis di chel fatôr stes, intant che chei altris fatôrs a rapresentin dimensions latentis che no van cjapadis in considerazion se l'unic obietîf de operazion al è chel de sintesi. A chescj si zontin ancje i fatôrs specifics che a dan un contribût particolâr ae spiegazion de variabilitât dai presits relatîfs.

Une altre strade e je chê di considerâ i presits al contrari e duncje, in reson di chel, ancje i numars indiçs elementârs a van considerâts tant che ogjets e i timps tant che dimensions diferentis che ju caraterizin. La struture di someance che e salte fûr de matriç dai dâts e pues jessi il criteri di sielzi par lâ indenant cuntune agregazion adate dai numars indiçs in classis, par rivâ ae fin a un agregât totâl di numars indiçs di indulà gjavâ fûr une dimension di sintesi.

*3.5. Il probleme de ponderazion.* Cualsisei procediment di agregazion si sielzi, al reste simpri il probleme de nature e dal significât dal sisteme di ponderazion doprât o di doprâ.

Tal câs che si sedi podût doprâ il metodi di rapuart jenfri agregâts esprimûts te stesse unitât di misure, il probleme al ven superât parcè che si ripuarte la operazion al calcul di un numar indiç elementâr gnûf, li che ognidune des variabilis e à il pês che i spiete su la fonde des sôs dimensions.

Tal câs di variabilis esprimudis in unitât di misure eterogjenis, par evitâ la vie de agregazion di cuantitâts no aditivis, il sisteme di pês di assegnâi a ognidune des grandecis prin de totalizazion al varès di jessi dât di un sisteme di coeficients di trasformazion adats a puartâ lis grandecis intune unitât di misure omogjenie. Par unitâts di misure de stesse nature, ma apartignintis a sistemis metrics diferents, i pês a saran dâts dai coeficients di conversion dai singui sistemis di unitât di misure a chel li che si intint di operâ. Tal câs di grandecis par lôr nature eterogjeniis, il sisteme di conversion plui imediât al è chel de trasformazion in valôr: in chest câs il sisteme di ponderazion al sarà dât dal vetôr dai presits.

Tal câs che si decidi di procedi cuntune agregazion midiant dal calcul dai valôrs medis, al salte fûr il probleme de ponderazion. Cualsisei al sedi l'obietîf de costruzion dal numar indiç di sintesi, da râr si pues considerâ i diviers indiçs elementârs ecuivalents, ven a stâi caraterizâts di un pês unitari. Se si à chê di costruî un indiç de produtivitât medie dal sisteme, si varà di dâ dongje lis produtivitâts di ognidun dai brancs di produzion omogjenie, o dai singui fatôrs de produzion, o des singulis areis produtivis.

Se la finalitât e je chê di costruî un indiç di redit, si varà di lâ indenant cu la agregazion di diviers numars indiçs calcolâts su indicadôrs di redit o di benstâ. Se si à di costruî un indiç de produzion industriâl, si varà di sintetizâ une batarie di numars indiçs che si riferissin a setôrs produtîfs singui. Alfin, se l'obietîf e je la costruzion di un numar indiç sintetic dai presits, si varà di cumbinâ lis variazions dai presits che si riferissin a bens e servizis che a àn une posizion cetant diferente tai volums des transazions comerciâls.

In fin dai fats, si varà di lâ indenant te agregazion di numars indiçs elementârs che a integnin setôrs, categoriis, teritoris e bens cetant eterogjenis par grât di impuartance, e chest grât si pues esaminâlu a seconde di aspiets une vore diferenziâts.

In chest câs, i operadôrs di sintesi a cjaparan cheste forme gjenerâl:

$$
\begin{aligned}
{}_bI_{t(M_{r,w})} &= M_r\left\{{}_bI_{t.}, w\right\} = \\
&= \left\{\Sigma\left({}_bI_{th}\right)^r w_h / \Sigma w_h\right\}^{1/r} = \\
&= \left\{\Sigma\left(x_{th} / x_{bh}\right)^r w_h / \Sigma w_h\right\}^{1/r}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Dant valôrs specifics a $r$ si rigjavin la medie aritmetiche, la medie gjeometriche e chê armoniche. Di fat:

par $r = 1$ si à la medie aritmetiche:

$$\begin{aligned} {}_bI_{t(M_{1,w})} &= M_1\left\{{}_bI_{t.}, w\right\} = \\ &= \Sigma\, {}_bI_{th} w_h / \Sigma w_h = \\ &= \Sigma\left(x_{th} / x_{bh}\right) w_h / \Sigma w_h \end{aligned} \tag{3.12}$$

par $r \to 0$ si à la medie gjeometriche:

$$\begin{aligned} {}_bI_{t(M_{0,w})} &= M_0\left\{{}_bI_{t.}, w\right\} = \\ &= \left\{\Pi\, {}_bI_{th}^{\ w_h}\right\}^{1/\Sigma w_h} = \\ &= \left\{\Pi\left(x_{th} / x_{bh}\right)^{w_h}\right\}^{1/\Sigma w_h} \end{aligned} \tag{3.13}$$

par $r = -1$ si à la medie armoniche :

$$\begin{aligned} {}_bI_{t(M_{-1,w})} &= M_{-1}\left\{{}_bI_{t.}, w\right\} = \\ &= \Sigma w_h / \Sigma\left(x_{bh} / x_{th}\right) w_h \end{aligned} \tag{3.14}$$

Al è clâr che si podarès ancje normalizâ il sisteme di pês, di mût che $\Sigma w_h = 1$, jessint $w_h > 0$.

No si pues definî di subite une regule che e permeti di assegnâ un sisteme di pês just, dal moment che la sielte e dipent dal obietîf che si vûl apaiâ midiant de costruzion de misure di sintesi.

Al è cui che, viodude la dificoltât di fâ une sielte in chest sens, al à rinunziât, assumint pês unitaris e duncje fasint il calcul di mediis semplicis. Tal cjamp dai indiçs spaziâi, par esempli, chest al è il câs dai indicadôrs di ripartizion jenfri subareis des grandecis di redit costruidis di organisims statistics uficiâi a nivel nazionâl o dut câs a nivel teritoriâl su-

periôr. Par agnorum la prassi comun e je stade chê di doprâ une batarie, cualchi volte cetant numerose, di indicadôrs, che a son stâts trasformâts in numars indiçs e po dopo tradusûts intune uniche misure di sintesi midiant dal calcul de medie aritmetiche semplice: si à dimostrât, tra l'altri, che sistemis di ponderazion diferents a puartin a risultâts pardabon cetant diferents e a distorsions penzis (Rondini, 1958)[3].
Pe soluzion dal probleme si pues però definî almancul cualchi regule di compuartament di lâi daûr in câs particolârs:

a) variabilis origjinariis, che a nassin de misure di grandecis aditivis: in chest câs, il sisteme di ponderazion al pues jessi dât dome che di grandecis misuradis tal timp base; di fat, se il fenomen al è dât dal vetôr:

$$x_{t.} = (x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{th}, \ldots, x_{tH})' \tag{3.15}$$

il vetôr dai numars indiçs elementârs:

$${}_bI_{t.} = \left({}_bI_{t1}, {}_bI_{t2}, \ldots, {}_bI_{th}, \ldots, {}_bI_{tH}\right)' \tag{3.16}$$

al va ponderât cul vetôr des grandecis osservadis tal timp base *b*:

$$x_{b.} = (x_{b1}, x_{b2}, \ldots, x_{bh}, \ldots, x_{bH})' \tag{3.17}$$

In altris tiermins, il pês gjeneric al sarà dât di:

$$w_h = x_{bh} / \Sigma x_{bh} \tag{3.18}$$

In cheste maniere, cun di fat, i numars indiçs al timp t a son puartâts aes grandecis origjinariis e la lôr sume e je rapuartade ae sume des grandecis stessis, scrutinadis tal timp base *b*;

b) variabilis origjinariis, esprimudis in unitât di misure di nature compagne ma apartignintis a sistemis metrics diferents; in chest câs si varà un vetôr di grandecis eterogjeniis:

$$z_{t.} = \left(z_{t1}, z_{t2}, \ldots, z_{th} \ldots, z_{tH}\right)' \tag{3.19}$$

il vetôr dai numars indiçs elementârs:

$$ {}_bI_{t.} = \left( {}_bI_{t1}, {}_bI_{t2}, \ldots, {}_bI_{th} \ldots, {}_bI_{tH} \right)' \qquad (3.20) $$

al va ponderât cul sisteme dai coeficients:

$$ w_h = k_h z_{bh} / \Sigma k_h z_{bh} \qquad (3.21) $$

indulà che cun $k_h$ si intint il coeficient di conversion de grandece $z_h$ te grandece $x_h$ (par esempli cuintâi e toneladis in chilos, oncis e pas in centimetris). Si noti che chest sisteme di pês al coincît cun chel dât des grandecis dal fenomen, esprimudis in unitâts di misure omogjeniis, riferidis al an base; la medie aritmetiche cussì ponderade e da il stes risultât dal metodi dal rapuart jenfri agregâts, ven a stâi de costruzion di un numar indiç elementâr aplicât a variabilis di sintesi;

c) variabilis origjinariis, esprimudis in unitât di misure di nature diferente (par esempli centimetris, chilos e litris); in chest câs, si à di lâ indenant te strade de trasformazion intune unitât di misure comun e di facile interpretazion economiche, tant che chê monetarie. Il sisteme di ponderazion al è duncje dât di presits:

$$ w_h = p_h z_{bh} / \Sigma p_h z_{bh} \qquad (3.22) $$

indulà che cun $p_h$ si intint un coeficient di trasformazion des cuantitâts in valôrs che al coincît cul presit in regjim di perfete stabilitât monetarie; tal câs contrari, al varà di jessi un pês che al nas di cualchi medie dai presits rilevâts ai doi timps considerâts;

d) variabilis origjinariis, esprimudis in unitât di misure di nature diferente e che no si puedin ricondusi a di un metri monetari comun (a podaressin par esempli jessi dai numars indiçs rigjavâts di indicadôrs di benstâ, o di disasi sociâl, o di cundizions di marcjât dal lavôr, dome par cualchidun di chescj si pues pensâ a une misure o almancul ae conversion in valôr): in chest câs no reste altre strade che chê di lâ indenant cun mediis semplicis o pûr cun tecnichis multivariadis, indulà che i sistemis di ponderazion si fondin su considerazions leadis ae variabilitât;

e) variabilis derivadis, che a nassin dai rapuarts di grandecis origjinariis, calcoladis cun chê di eliminâ cualchi dimension o cualchi componentte, tant che lis produtivitâts, lis grandecis pro capite, lis propensions mediis o margjinâls, e vie indenant: in chest câs i pês a saran dâts des grandecis che a stan al denominadôr o, se chestis no son cognossudis, di lôr indicadôrs adats o di rapuarts di composizion che a dedin une misure dal grât di impuartance di ognidune des grandecis origjinariis tal agregât. Si à, par esempli, un vetôr di grandecis esprimudis te stesse unitât di misure:

$$x_{t.} = \left(x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{th}, \ldots, x_{tH}\right)' \qquad (3.23)$$

un secont vetôr di grandecis, che il plui des voltis a esprimin cualchi dimension des unitâts di osservazion (popolazion, ocupazion, oris lavoradis, redit, e v. i.):

$$y_{t.} = \left(y_{t1}, y_{t2}, \ldots, y_{th}, \ldots, y_{tH}\right)' \qquad (3.24)$$

Un vetôr di grandecis derivadis, origjinadis dai cuozients:

$$s_{t.} = \left(s_{t1}, s_{t2}, \ldots, s_{th}, \ldots, s_{tH}\right)' \qquad (3.25)$$

indulà che l’element gjeneric al è dât di:

$$s_{th} = x_{th} / y_{th} \qquad (3.26)$$

In chest câs al è clâr che il sisteme di ponderazion al varà di jessi dât de variabile che si met al denominadôr dal cuozient e che duncje al sarà:

$$w_h = y_h \qquad (3.27)$$

indulà che cun $y_h$ si intint une cualchi medie des grandecis *h-esimis* scrutinadis tai doi timps. Tal câs che chestis a sedin esprimudis in unitâts di misure eterogjeniis, il sisteme di ponderazion al sarà dât ancjemò des grandecis al denominadôr; la medie però e presentarà lis dificoltâts di interpretazion che si son viodudis pai câs analics;

f) variabilis origjinariis o derivadis che di lôr no si cognòs nissune dimension par costruî sistemis di ponderazion adats. In chest câs, invezit di une ponderazion uniforme, dispès si à pensât di assegnâi un sisteme resonât di coeficients di ponderazion, che in cualchi maniere a àn di fâ di spieli al diviers grât di impuartance dai singui indiçs elementârs.

Se no son elements che a permetin di sielzi in maniere zovevule l'operadôr di mediazion o dal sisteme di ponderazion, al pues jessi miôr doprâ tecnichis di agregazion dai numars indiçs elementârs, fondadis su metodis multivariâts. Tes impostazions plui dopradis, chestis si tradusin tal calcul di une cumbinazion lineâr dai numars indiçs elementârs, indulà che i coeficients, e duncje i pês, a son rigjavâts de matriç dai dâts, cence fâ ûs di informazions esternis ai dâts stes, cemût che si fâs tal câs dai sistemis di ponderazion metûts in vore tes mediis analitichis, che a àn bisugne di un suplement di dâts. E je la stesse struture di variabilitât e covariabilitât a vuidâ il ricercjadôr te costruzion di sistemis di pês zovevui, tal sens che lis variabilis di agregâ a son consideradis no tant te lôr impuartance assolude tal ambit dal agregât, ma ben in funzion de lôr variabilitât e des relazions che a pein ognidune di lôr a di une altre tal ambit dal insiemi dai dâts in esam.

## 4. I numars indiçs temporâls dai presits

*4.1. Lis fonts di variabilitât dai presits.* I numars indiçs, aben che si podedi aplicâju a cualsisei grandece scrutinade secont di une secuence temporâl o spaziâl, ancje di nature no economiche, a àn cjatât il cjamp plui impuartant di aplicazion e il sburt plui fuart al lôr studi e disvilup cun riferiment ae evoluzion dai presits tal timp[4]. Come che si sa, par presit di un ciert ben si intint, in tiermins relatîfs, il rapuart di scambi jenfri doi bens, ven a stâi la cuantitât di un prin ben che bisugne cedi intune transazion di marcjât par vê une unitât di un secont ben. Cuant che un stes ben al ven doprât par misurâ il presit dai tantissims prodots ogjet di scambi comerciâl intune economie fondade sul marcjât, il ben stes al è clamât monede e al devente la unitât particolâr di misure che e caraterize lis grandecis economichis esprimudis no in cuantitât fisiche ma ben in valôr.

Daûr di chest aspiet, la monede e à la finalitât dople di esprimi il valôr dai bens e dai servizis che a son ogjet di scambi sul marcjât e di permeti operazions di agregazion di bens e servizis che no saressin pussibilis se lis grandecis a fossin esprimudis in cuantitâts fisichis, par vie de eterogjeneitât des unitâts di misure. La trasformazion in valôr des cuantitâts midiant de intermediazion de monede e permet chês operazions di agregazion che a dan lis fondis pai procediments di misure e di analisi propriis de statistiche economiche.

I presits a son grandecis economichis caraterizadis di une variabilitât fuarte par chel che al inten il profîl categoriâl, temporâl e spaziâl, si che duncje cheste variabilitât e à di jessi misurade midiant di struments adats che a son dâts prin di dut dai numars indiçs, elementârs o pûr componûts.

La teorie economiche e à dadis cetantis spiegazions coerentis dai procès di formazion dai presits, che si diferenziin tra i diviers bens (variabilitât categoriâl) par un complès di fatôr peâts ai coscj di produzion e di distribuzion, ai rapuarts di complementaritât e sucedaneitât, ae intensitât de domande e aes formis prevalentis di marcjât intun ciert contest economic. Chest insiemi di circostancis al spieghe la diviersitât dai nivei dai presits dai diviers bens, che a puedin di par lôr vê efiet in mût diferent di man in man che si movisi sul teritori economic dal sisteme considerât. Cun di plui, a puedin mudâ par intensitât e composizion di un timp a un altri.

Lassant stâ la variabilitât di tip categoriâl, si viôt che lis variazions dai presits tal timp a son cetant evidentis, pe azion di un ordin dopli di robis.

Prin di dut, bisugne tignî ad a ments lis carateristichis specifichis de unitât di misure doprade par esprimi lis grandecis economichis in tiermin di valôr. Se il ben che si dopre tant che monede nol cambiàs tes sôs carateristichis fisichis, tal so grât di utilitât e tal so totâl, si podarès considerâlu ae stesse maniere di une des tantis unitâts di misure fisiche, une vore numerosis e dopradis par misurâ grandecis esprimudis in volum, pês, estension, e vie indenant. Ancje tal câs che al fos dât di un ben economic, la sô utilitât stesse e la sô disponibilitât sul marcjât a podaressin subî variazions in cualchi câs sensibilis tal timp, modificant in maniere ancje significative il sisteme dai presits. La monede fiduciarie e jere cjapade par buine dai operadôrs, cence nissun fastidi, viodude la sô utilitât, omogjeneitât e inalterabilitât. La monede legâl, invezit, e à di jessi fate buine in maniere sfuarçade tant che mieç liberatori e che e tint a liberâsi simpri plui di cualsisei riferiment a bens economics, come i metai preziôs, aben che al vedi di poiâ su di une adesion spontanie dai operadôrs. Cuant che la monede fiduciarie e je sostituide cun chê legâl, e devente ogjet di un procès di deterioramant de sô capacitât di misurazion, che cualchi volte al somee lent, ma che, altris voltis, soredut cuant che si piert la fiducie dal public, al pues deventâ une lavine. Il risultât al è une cause sigure e gjenerâl di variazion dai presits.

In secont lûc, a jentrin in zûc lis variazions tes cetantis causis che a influissin su la formazion dai presits dai singui bens. Variazions te domande e te ufierte dai bens, modificazions tes lôr carateristichis di marcjanzie, variazions dai presits des materiis primis e dai fatôrs di produzion, jentrade tal marcjât di prodots complementârs o suplementârs, trasformazions tai compuartaments dai consumadôrs, mudaments des formis di marcjât propriis di cierts setôrs produtîfs, e altris inmò: al è dut un insiemi di fatôrs metûts dongje in diviersis manieris e che a causionin modifichis dai presits relatîfs.

Chestis trasformazions te capacitât di misurazion de monede e te struture dai presits relatîfs a puedin lavorâ ancje a nivel di sotinsiemis diferents dal spazi economic, ma in maniere mancul eficaç, viodude la fuarte interconession dai sistemis economics modernis a nivel spaziâl. Chescj ultins, cun di fat, a tindin a meti in vore dai procès di omogjeneizazion che si tradusin intune solidarietât di massime des dinamichis dai presits.

*4.2. La misure de variabilitât tes diviersis metodichis*

*4.2.1. Premesse.* La variabilitât dai presits, tes diviersis dimensions che si pues considerâle, e je misurade prin di dut midiant di numars indiçs elementârs che a permetin di vê une misure clare des variazions dai presits di un sôl ben in diviersis circostancis di timp o di spazi. Chescj, gjavant la unitât di misure e l'ordin di grandece, nus permetin di fâ comparazions adatis jenfri i compuartaments dai presits dai diviers bens.

Elaborazions seguitivis sui singui numars indiçs elementârs a podaran meti in lûs profîi diferents di variabilitât e in câs ancje compuartaments di periodi lunc o causis di nature struturâl che indi spieghin o interpretin la variabilitât. Par altri, la sintesi des pluralitâts di informazions che si rindin disponibilis su di un sisteme intîr di presits e rapresente une dibisugne une vore fuarte, che e à di cjatâ lis rispuestis dal câs midiant de costruzion di misuris di sintesi, dadis di numars indiçs componûts, za considerâts in tiermins gjenerâi par grandecis economichis di cualsisei nature.

Viodude la origjin particolâr di chestis grandecis e lis tantis implicazions peadis ae teorie economiche, il probleme si pues frontâlu daûr di diviers aspiets che, dut câs, si puedin in cualchi maniere ricondusi a interpretazions di nature economiche. A son metodichis che in leterature a cjapin diviers nons e che in cheste tratazion a saran indicadis tant che metodiche di tip distributîf, agregatîf, funzionâl e assiomatic.

*4.2.2. La metodiche distributive.* Daûr di cheste metodiche, definide cualchi volte «atomistiche», «stocastiche» o «statistiche» in sens strent[5], i presits singui o i numars indiçs elementârs singui a puedin jessi considerâts ae stesse maniere des misuris ripetudis di une stesse grandece, rapresentade dal presit «tipic», che al palese il podê di acuist de monede (midiant dal so reciproc). In altris peraulis, al sarès il presit che a varessin i bens singui tal câs che no intervignissin i tancj fatôrs peâts ai coscj di produzion, ai rapuarts jenfri domande e ufierte, aes formis di marcjât, ai rapuarts di complementaritât e di sucedaneitât, che a dan a ogni ben un valôr unitari diviers.

Il podê di acuist de monede, reciproc dal nivel gjenerâl dai presits, al è une grandece che no si pues scrutinâ. Ae stesse maniere di cualsisei altre grandece esistente in nature o in economie, al pues jessi individuât dome midiant di une schirie di sôs manifestazions imperfetis e aprossimadis, dadis dai risultâts di operazions di misure che a tindin a aprossimâ la grandece ma che no rivin mai a cjapâle te sô dimension precise. Chestis determinazions diferentis a son dadis dai presits di ogni ben, che si formin par efiet di une cause monetarie uniche e par dute une schirie di pluralitâts di causis specifichis, che a son leadis aes carateristichis de marcjanzie e economichis dai stes bens.

La misure di sintesi di ognidune des grandecis e nas inalore dal esam des sôs carateristichis distributivis. La distribuzion dai presits assolûts o dai lôr numars indiçs elementârs ator di un lôr centri di gravitât e darà duncje la rispueste a cheste dibisugne di sintesi.

La metodiche «distributive», clamade ancje «atomistiche» – tal sens che no si fâs riferiment ai volums des transazions, e duncje dal diviers pês economic dai diviers bens, ma si cjapin in considerazion dome i presits puntuâi – si tradûs tal studi des distribuzions di insiemis di presits.

E je la strade frontade di tancj studiôs, sedi di aree economiche, che di aree statistiche, par esempli Mitchell (1921)[6], March (1923), Olivier (1927)[7], Tenderini (1934)[8], Uggè (1946), Saibante (1950)[9], Faleschini (1956)[10] e Mastrodonato (1973)[11].

Se la distribuzion dai presits intune cierte circostance di timp e di spazi e somee lâ daûr di une distribuzion normâl, la interpretazion di caratar statistic pûr, che e considere i presits tant che misure ripetude di une stesse grandece, e somee cjatâ une conferme specifiche, marcant, tra l'altri, ancje la misure di sintesi plui juste, che e je dade de medie aritmetiche:

$$ {}_bI_{tC} = \Sigma_h\left(p_{th} / p_{bh}\right) / H \tag{4.1}$$

indulà che cun $p_{th}$ si indiche il presit al timp $t$ che al inten il ben $h$ e cun $p_{bh}$ il presit che i corispuint, scrutinât tal periodi di base $b$ (cun $h$ = 1, 2, …, $H$). Al va marcât che chest al è il numar indiç za proponût di Gian Rinaldo Carli tal 1760[12].

La sielte de medie aritmetiche semplice pe sintesi e cjatarès in cheste maniere une justificazion specifiche te forme de distribuzion de popolazion di presits, rigjavâts intun ciert moment dentri di une cierte dimension spaziâl.

Tal câs che la distribuzion dai presits o dai lôr numars indiçs si presenti tant che une lognormâl, e sarès justificade la sielte de medie gjeometriche:

$$ {}_bI_{tJ} = \left\{\Pi_h\left(p_{th} / p_{bh}\right)\right\}^{1/H} \tag{4.2}$$

che si pues esprimi come medie aritmetiche dai logaritmis dai tiermins che, al è clâr, al è il parametri di posizion di une distribuzion lognormâl. Chest numar indiç al è stât al inizi proponût di Jevons (1909)[13].

Cheste metodiche e cjate par altri cualchi ostacul fondamentâl in doi ordins di considerazions.

Di une bande, la osservazion empiriche che e nas di analisis detaiadis di popolazions di presits e somee dineâ la ipotesi di normalitât o di lognormalitât. Lis distribuzions dai presits o dai lôr indiçs elementârs si mostrin di regule di tip asimetric, cun plui o mancul scostaments de normâl. A son stadis cjatadis distribuzions di nature diferente, cuntune maiorance di distribuzions di tip leptocurtic, che a jentrin pal plui tal prin, cuart e sest tip dal sisteme di Pearson.

Une impostazion plui realiste e podarès jessi chê ipotizade e studiade di Faleschini (1951)[14], che al ricondûs lis carateristichis di anormalitât e massime chê di asimetrie al fat che, in efiets, lis popolazions dai presits, cuant che no si riferissin a un unic gjenar o a une categorie uniche di gjenars avonde omogjenis, a son il risultât di un miscliç di presits causionâts di ancjetantis causis.

Di chê altre bande, a cheste impostazion i dan cuintri resons specifichis che a integnin la nature des grandecis consideradis. Une des ipotesis fondamentâls dal model dai erôrs di misure e je dade de indipendence stocastiche des determinazions singulis, ipotesi che no pues jessi verificade in nissune maniere tai confronts di ciertis grandecis, come par esempli i presits. Chestis grandecis, di fat, a son peadis di plui relazions, causionadis di cetancj mecanisims di gjenerazion de lôr variabil no dome categoriâl, ma ancje temporâl e spaziâl. La ricercje di misuris di sintesi che a sedin lis stessis dai valôrs medis di distribuzion di tip gaussian o di altris peadis a chestis no cjate duncje justificazions plausibilis. Un unic orientament prometent, ma no seguît di altris studiôs, al somee chel di Faleschini (1951) su la distribuzion di presits tant che miscliçs di distribuzions elementârs, che la lôr forme e pues jessi leade ancje a rapuarts di covariazion dentri di categoriis relativementri omogjeniis e la lôr asimetrie e je leade soredut ae asimetrie des variabilis componentis, de asimetrie de distribuzion des mediis e de covariance jenfri mediis e variancis.

*4.2.3. La metodiche agregative.* Stant a cheste metodiche, metintsi ae ricercje di chê grandece no osservabile che e je dade dal nivel gjenerâl dai presits o dal so reciproc, dât dal podê di acuist dal strument monetari, si rinunzie ae ricercje di une medie tipiche. Il probleme al è duncje frontât tacant di une grandece economiche agregade esprimude in tiermins monetaris, daûr di un sisteme di presits rilevabil tal timp di riferiment, e metintle a confront cuntun agregât analic che il so nivel al è, in cualchi maniere, funzion dai presits rilevâts tal an base.

In altris tiermins, bisugne costruî un numar indiç che al nas dal rapuart jenfri dôs funzions diviersis dai presits rilevâts sù corispondence dal timp di riferiment *t* e dal timp base *b*:

$$ {}_bI_t = f_1\left(p_{t1}, p_{t2}, \ldots, p_{th}, \ldots, p_{tH}\right) / f_2\left(p_{b1}, p_{b2}, \ldots, p_{bh}, \ldots, p_{bH}\right) \qquad (4.3) $$

Cuant che lis funzions si tradusin in sumis di valôrs, o ben prodots di cuantitâts par presits, si dopre il procediment che al è ae fonde de costruzion dai numars indiçs implicits dai presits, secont cualchi agregât economic reâl, che lis sôs cuantitâts di bens e di servizis ogjet di scambi a son imobilizadis. Lis valutazions in tiermins monetari, invezit, di une bande a son chês reâls rigjavadis des transazions, e di chê altre a saltin fûr di un sisteme di presits rilevât tal periodi di base.

In altris peraulis, il numar indiç componût dai presits al nas di un rapuart jenfri agregâts che al à par fonde il principi de costance di un cos di bens che a vegnin imobilizâts par numar, cualitât e cuantitât, intant che i presits a vegnin fats variâ. La cundizion di invariance e pues interessâ sedi lis cuantitâts, sedi i valôrs e la spese (dai consumadôrs par bens di consum, dai produtôrs par bens di invistiment o par bens intermedis).

Al salte fûr un insiemi di numars indiçs che a puedin vê cheste forme:

$$ {}_bI_{tP} = {}_ts_t \,/\, {}_bs_t = \Sigma_h p_{th} q_{th} \,/\, \Sigma_h p_{bh} q_{th} \qquad (4.4) $$

indulà che cun ${}_ts_t$ si indiche l'agregât economic gjeneric che si riferìs al timp *t* (deponent di drete) e valutât ai presits corints dal stes an *t* (deponent di çampe).

Al è un numar indiç «implicit» dai presits, riferît al agregât reâl (prodot interni sporc, consums finâi, consums di un agregât particolâr di fameis, par solit cun cjâf di famee lavoradôr dipendent, consums intermedis, importazions, esportazions, invistiments) ma esprimût in tiermins monetaris, clamât ancje, in funzion des finalitât che il plui des voltis a puartin a costruîlu, *deflatôr* di chel agregât particolâr. Chest al cjape il non di numar indiç dai presits di Paasche (1874)[15], che lu proponè tant che medie aritmetiche ponderade cun valôrs peâts al periodi di riferiment dal numar indiç di un insiemi di numars indiçs elementârs.

Se il rapuart al ven costruît jenfri doi agregâts peâts in tiermins di cuantitât al periodi cjapât come base, ma valutâts su la fonde dai presits rilevâts tal periodi di riferiment, e rispetivemendri tal periodi di base, o, in altris tiermins, se si costruìs un rapuart che al denominadôr si met l'agregât che al è stât rilevât tal periodi di base e al numeradôr si met un agregât pustiç li che a vegnin fûr i bens dal periodi base valutâts a presits dal timp di riferiment, si à un altri indiç cetant cognossût, che al cjape cheste forme:

$$ {}_bI_{tL} = {}_ts_b \,/\, {}_bs_b = \Sigma_h p_{th} q_{bh} \,/\, \Sigma_h p_{bh} q_{bh} \tag{4.5} $$

Al è il ben cognossût numar indiç dai presits di Laspeyres (1871)[16], che si pues costruî ancje tant che medie aritmetiche ponderade di un insiemi di numars indiçs elementârs cun sisteme di ponderazion dât dai valôr rilevâts tal periodi di base[17].

Intune altre impostazion, il numar indiç componût al podarès saltâ fûr dal rapuart di doi agregâts, ducj i doi costruîts par calcul, tacant cul sisteme di cuantitâts rilevadis intun periodi ($b + c$), cun $| c | < (b - t)$, intermedi jenfri $b$ e $t$. In chest câs, si varès chest numar indiç:

$$ \begin{aligned} {}_bI_{tLw} &= {}_ts_{b+c} \,/\, {}_bs_{b+c} \\ &= \Sigma_h p_{th} q_{b+c,h} \,/\, \Sigma_h p_{bh} q_{b+c,h} \end{aligned} \tag{4.6} $$

Al è l'indiç di Lowe (1822)[18], che si pues intindi ancje tant che rapuart che al salte fûr di une operazion di ponderazion cul sisteme di valôrs calcolâts intun periodi intermedi jenfri chel di base $b$ e chel di riferiment $t$.

Une cuarte soluzion e pues jessi chê che e nas di un rapuart jenfri doi agregâts dal dut artificiâi, dâts des sumis des cuantitâts rilevadis tal periodi di base e tal periodi di riferiment, ancje chestis valutadis tai doi periodis:

$$ {}_bI_{tE} = \Sigma_h p_{th} \left( q_{bh} + q_{th} \right) / \Sigma_h p_{bh} \left( q_{bh} + q_{th} \right) \tag{4.7} $$

Chest al è il numar indiç proponût di Edgeworth (1925)[19], ricjapât di Marshall (1923)[20] e di Bowley (1928)[21], che si pues interpretâ tant che une medie aritmetiche di numars indiçs elementârs, cuntun sisteme di ponderazion dât de sume des cuantitâts rilevadis in corispondence dai doi timps, o pûr, che al è il stes, des mediis aritmetichis des cuantitâts rilevadis jenfri i doi estrems. Une altre interpretazion pussibile dal indiç di Edgeworth (1925) e je chê di considerâlu tant che une medie aritmetiche ponderade dal indiç di Laspeyres (1871) e di chel di Paasche (1874) cun pês dâts di ${}_bs_b$ pal prin e di ${}_bs_t$ pal secont.

Fin cumò si à cjapât in considerazion dome procediments di costruzion di numars indiçs componûts fondâts sul rapuart jenfri doi agregâts dâts di sumis, riferidis a doi timps diferents. In cheste metodiche si pues fâ jentrâ ancje altris impostazions che, aben che no si fondin su agregâts che si puedin interpretâ secont une interpretazion precise di nature economiche, a rindin necessari di fâ riferiment a grandecis di cuantitât pe costruzion di misuris adatis di sintesi des variazions dai presits.

In particolâr, si riferissisi ai indiçs continuis di Divisia (1925)[22], dai indiçs logaritmics di Törnqvist (1936)[23], Vartia (1976-1976)[24], Sato (1976-1976)[25], e dai indiçs otimâi di Theil (1960)[26].

I numars indiçs di Divisia (1925)[27] a nassin de dibisugne dople di une bande di costruî dai struments di misure des variazions che no dopredin lis informazions di presit e cuantitât dome in corispondence dal timp di riferiment $t$ e dal timp base $b$, ma che e cjapedin dentri in cualchi mût lis informazions su dute la storie comprendude jenfri chescj moments e, di chê altre bande, di rigjavâ dai numars indiçs a cjadene o a base mobil che a verifichin cheste proprietât, che e somee jessi la plui significative dal pont di viste economic, de decomponibilitât des variazions di valôrs, in tiermins di variazions monetaris e di variazions reâls[28].

I indiçs di Divisia (1925) a cjapin cheste formulazion gjenerâl:

$$ {}_bI_{tD} = e^{\int_b^t \Sigma w(s)\, p(s)^{-1}\, dp(s)} \tag{4.8} $$

Indulà che cun w(s) si intint il pês relatîf de spese par un ciert gjenar sul totâl de spese, stimade a presits corints, e duncje, cun riferiment al timp $t$:

$$ w_h(t) = p_h(t)q_h(t) / \Sigma_h p_h(t)q_h(t) \tag{4.9} $$

al è clâr che l'indiç al dipent dal compuartament de funzion *w(t)* tal cjamp di integrazion, podint cjapâ diviersis formis a seconde dal andament di cheste funzion di ponderazion.

Te lôr formulazion gjenerâl, i indiçs di Divisia dai presits e i indiç des cuantitâts che ur corispuindin a son costruîts cjapant tant che pont di partence la definizion di un indiç dai presits che al sodisfi la proprietât fondamentâl de decomponibilitât rispiet aes causis di variazion dai valôrs, o di reversibilitât dai fatôrs, che si pues esprimi in cheste maniere:

$$V(t) = P(t)\ Q(t) \tag{4.10}$$

indulà che cun *V(t)* si indiche l'indiç di valôr, cun *P(t)* l'indiç dai presits e cun *Q(t)* l'indiç des cuantitâts che i corispuint. Ducj a fasin riferiment al timp base *b*.

Bisugne cumò rigjavâ un numar indiç dai presits, e duncje un indiç corispuindint des cuantitâts, che di une bande al sedi funzion continue dal timp *t*, rispiet a une dade base *b*, e che di chê altre bande al fasi buine la proprietât di decomponibilitât citade prime, che e je une vore impuartante dal pont di viste economic.

Ricuardant che daûr de definizion di indiç elementâr di valôr:

$$V(t) = \Sigma p(t) q(t) / \Sigma p(b) q(b)$$

si pues scrivi:

$$P(t) Q(t) = \Sigma_h p_h(t) q_h(t) / \Sigma_h p_h(b) q_h(b)$$

passant ai logaritmis naturâi si à:

$$1n\ P(t) + 1n\ Q(t) = 1n\ \left[\Sigma_h p_h(t) q_h(t)\right] - 1n\ \left[\Sigma_h p_h(b) q_h(b)\right]$$

Derivant rispiet al timp *t* si à:

$$P(t)^{-1}\ dP(t) + Q(t)^{-1}\ dQ(t) = d\left[1n\ \Sigma_h\ p_h(t) q_h(t)\right]$$

dal moment che *b* e rapresente il timp base e duncje e je une grandece costante.

Disvilupant ancje la derivade dal membri di drete, si à:

$$P(t)^{-1}\, dP(t) + Q(t)^{-1}\, dQ(t) =$$
$$= \Sigma_h\, dp_h(t) q_h(t) / \Sigma_h\, p_h(t) q_h(t) + \Sigma_h\, p_h(t) dq_h(t) / \Sigma_h\, p_h(t) q_h(t)$$

Il secont membri si pues ancje scrivilu, moltiplicant e dividint i numeradôrs un par *p(t)* e chel altri par *q(t)*, in cheste maniere:

$$\Sigma_h \left\{ p_h(t) q_h(t) / \Sigma_h p_h(t) q_h(t) \right\} dp_h(t)\, p_h(t)^{-1} +$$
$$+ \Sigma_h \left\{ p_h(t) q_h(t) / \Sigma_h p_h(t) q_h(t) \right\} dq_h(t)\, q_h(t)^{-1}$$

Metint che:

$$w_h(t) = p_h(t) q_h(t) / \Sigma_h\, p_h(t) q_h(t)$$

si pues scrivi in maniere plui compate:

$$P(t)^{-1}\, dP(t) + Q(t)^{-1}\, dQ(t) =$$
$$= \Sigma_h w_h(t) dp_h(t)\, p_h(t)^{-1} + \Sigma_h w_h(t) dq_h(t)\, q_h(t)^{-1}$$

In altris peraulis, la derivade logaritmiche dal prodot di doi numars indiçs e je avuâl ae sume di dôs mediis ponderadis des derivadis logaritmichis, une dai presits e chê altre des cuantitâts corintis, cuntun sisteme di pês dâts des frazions di spese par ogni gjenar sul totâl de spese corinte valutade a presits corints.

A chest pont si cjape la avualance dal prin sumant dal membri di çampe cul prin sumant dal membri di diestre, e il stes si lu fâs pal secont sumant, che al rivuarde l'indiç di cuantitât. Metìn duncje:

$$P(t)^{-1}\, dP(t) = \Sigma_h\; w_h(t)\; dp_h(t)\; p_h(t)^{-1}$$

E tal ordin:

$$Q(t)^{-1}\, dQ(t) = \Sigma_h\ w_h(t)\ dq_h(t)\ q_h(t)^{-1}$$

E je une division che no cjate justificazion in nissun passaç analitic, ma che e je doprade par vie de simetrie evidente des relazions e ancje de interpretazion economiche che si pues assegnâur. Integrant ducj i doi i membris des dôs ecuazions tal interval [*b, t*], si à:

$$1n\ \mathrm{P}(t) - 1n\ \mathrm{P}(b) = \int_b^t \Sigma_h\ w_h(s)\ p_h(s)^{-1}\ dp_h(s)$$

$$1n\ \mathrm{Q}(t) - 1n\ \mathrm{Q}(b) = \int_b^t \Sigma_h\ w_h(s)\ q_h(s)^{-1}\ dq_h(s)$$

e duncje:

$$1n\ \mathrm{P}(t) = 1n\ \mathrm{P}(b) + \int_b^t \Sigma_h\ w_h(s)\ p_h(s)^{-1}\ dp_h(s)$$

$$1n\ \mathrm{Q}(t) = 1n\ \mathrm{Q}(b) + \int_b^t \Sigma_h\ w_h(s)\ q_h(s)^{-1}\ dq_h(s)$$

In pratiche, si varà:

$$P(t) = P(b) + e^{\int_b^t \Sigma w_h(s) p(s)^{-1} dp(s)} \tag{4.11}$$

$$Q(t) = Q(b) + e^{\int_b^t \Sigma w_h(s) p(s)^{-1} dq(s)} \tag{4.12}$$

Indulà che par altri al salte fûr che *P(b)* = 1 e ae stesse maniere *Q(b)* = 1, ∀*b.*

Tornant ai solits simbui pai numars indiçs, si varà la espression scrite cualchi rie indaûr.

Si pues furnî une forme esplicite di chescj numars indiçs dome definint ipotesis adatis sul compuartament dal sisteme di pês *w(t)* tal interval di integrazion [*b, t*]. Se si rive a formulâ la ipotesi di invariance dai pês tal interval di integrazion e duncje, in tiermins economics, la costance des frazions di spese di ognidun dai gjenars considerâts, cjapant, par ducj i gjenars, une elasticitât unitarie de domande rispiet ai presits, al è stât dimostrât di Roy (1949)[29] che i indiçs a cjapin sù la forme di une medie gjeometriche ponderade; cun di fat, tignint cont che $\Sigma w_h = 1$, si à:

$$_{b}I_{tD} = \Pi_h \left( p_{th} / p_{bh} \right)^{w_h} \tag{4.13}$$

Se no si pues fâ riferiment a une ipotesi fuarte di cheste nature, che e impliche une elasticitât de domande rispiet ai presits avuâl ae unitât par ducj i gjenars, si podarà cjapâ par buine cheste ipotesi, in riferiment a intervai di largjece minôr indulà che si pues formulâ la ipotesi di invariance des cuotis di spese.

In altris tiermins, si pues dividi l'interval di osservazion $[b, t]$ in trê intervai $[b, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t]$, indulà che $b < t_1 < t_2 < t$.

Si pues duncje esprimi l'indiç dai presits in cheste maniere:

$$P(t) = e\left\{\int_b^{t1} \Sigma w_h(s)\, p(s)^{-1}\ dp(s) + \int_{t1}^{t2} \Sigma w_h(s)\, p(s)^{-1}\ dp(s) + \int_{t2}^{t} \Sigma w_h(s)\, p(s)^{-1}\ dp(s)\right\} \tag{4.14}$$

Si à cussì par risultât un indiç a cjadene, fat di plui mediis gjeometrichis ponderadis.

Se no si rive o se nol conven formulâ ipotesis sul compuartament dai pês $w_h(s)$, si pues dut câs doprâ il teoreme de medie dal calcul integrâl par otignî:

$$1n\, P(t) = \Sigma_h\ w_h\ \left[1n\, p_h(t) - 1n\, p_h(b)\right] \tag{4.15}$$

indulà che cun $w_h$ si indiche une medie ponderade dai pês $w_h(s)$ definîts in $[b, t]$.

Se l'interval temporâl ogjet de analisi nol è cuissà ce larc, cheste medie si pues aprossimâle cu la cuote di spese dal gjenar considerât in dut l'interval.

Stant che te realtât i presits, lis cuantitâts e i timps a son grandecis discretis, che dome in vie teoriche si pues aplicâur dai numars indiçs che si movin tal continui, al va però dit che l'indiç di Laspeyeres (1871) al pues jessi considerât tant che une aprossimazion tal discret dal numar indiç di Divisia (1925) dai presits, intant che une funzion analighe le fâs la formule di Paasche (1874) par l'indiç di cuantitât. Si pues interpretâ i altris indiçs componûts proponûts de leterature tant che aprossimazions dai numars indiçs di Divisia (Fisher 1922, Törnqvist 1936).

Dutis lis aprossimazions a compuartin par definizion un margjin di erôr, che al è stât studiât a dovê di diviers autôrs. In particolâr, si à dimostrât che, in ogni câs, a esistin dôs diviersis fonts di erôr. Prin di dut, i erôrs a jentrin par vie de aprossimazion discrete dai tas istantanis di variazion dai presits, des cuantitâts e dai pês, che a son funzion continue dal timp (Trivedi 1981). In secont lûc, al è stât dimostrât che chest erôr al cjape compuartaments cumulatîfs di man in man che si passe di un interval a chel altri (Allen 1963, Allen 1975)[30].

La seconde classe di indiçs e je chê dade dai cussì nomenâts numars indiçs a variazion logaritmiche, che si tradusin in mediis gjeometrichis ponderadis di numars indiçs elementârs, cun sistemis di pês a diferenziin ognidun dai numars indiçs proponûts dai diviers autôrs su la fonde di justificazions diferentis, sedi di nature formâl, sedi di caratar economic. Chescj indiçs a son significatîfs par dute une schirie di resons stant che, di là di rapresentâ formis specifichis di aprossimazion dai numars indiçs di Divisia (1925) e di permeti di frontâ il probleme de concatenazion, doprâ la medie gjeometriche al è plui justificât dal pont di viste dal caratar formâl. Chest fat si riflet ancje su lis miôr proprietâts formâls di chescj indiçs, sigurant la pussibilitât di fâ dai colegaments interessants cu la metodiche funzionâl.

Te lôr impostazion plui gjenerâl, i numars indiçs a variazion logaritmiche si puedin esprimi in cheste maniere:

$$ {}_bI_{tLog} = e^{\Sigma w_h 1n(p_t/p_b)} = e^{\Sigma w_h (1n\, p_t - 1n\, \mathrm{p}_b)} \qquad (4.16) $$

che si puedin scrivi ancje cussì:

$$ {}_bI_{tLog} = \Pi_h \left( p_{th} / p_{bh} \right)^{w_h} \qquad (4.17) $$

indulà che il sisteme di pês al pues cjapâ configurazions diferentis, che si puedin justificâ in cetantis manieris diviersis, di mût di sodisfâ proprietâts formâls oportunis o cundizions specifichis di nature economiche.

Il plui cognossût di chescj numars indiç al è chel proponût di Törnqvist (1936):

$$ {}_bI_{tTo} = \Pi_h \left( p_{th} / p_{bh} \right)^{w_h} \tag{4.18} $$

cun

$$ w_h = 1/2 \left\{ \left[ \left( p_{th} q_{th} \right) / \Sigma_h p_{th} q_{th} \right] + \left[ \left( p_{bh} q_{bh} \right) / \Sigma_h p_{bh} q_{bh} \right] \right\} $$

ven a stâi che ognidun dai numars indiçs elementârs al è ponderât cu la medie aritmetiche des frazions di spese rilevadis al timp di riferiment *t* e al timp base *b*.

Une propueste antecedente e je chê di Walsh (1901)[31] che al propon une serie di pês dâts de medie gjeometriche dal rapuart jenfri lis spesis rilevadis al timp di riferiment *t* e al an base *b* e il prodot des sumis des spesis rilevadis in chescj periodis:

$$ {}_bI_{tW} = \Pi_h \left( p_{th} / p_{bh} \right)^{w_h} \tag{4.19} $$

cun

$$ w_h = \left\{ \left[ \left( p_{th} q_{th} \right) / \Sigma_h p_{th} q_{th} \right] \; \left[ \left( p_{bh} q_{bh} \right) / \Sigma_h p_{bh} q_{bh} \right] \right\}^{1/2} $$

Il sisteme dai pês proponût di Vartia (1976) e dopo di Sato (1976) e Vartia (1976)[32] al è dât dal rapuart jenfri une medie logaritmiche des spesis rilevadis tal periodi di riferiment e in chel di base intun rapuart analic jenfri la medie logaritmiche des frazions di spese e la sume di chestis mediis estindudis a ducj i gjenars considerâts.

Si varà cussì prin di dut l'indiç di Vartia (1976):

$$ {}_bI_{tV} = \Pi_h \left( p_{th} / p_{bh} \right)^{w_h} \tag{4.20} $$

cun

$$w_h = \left[ \left( p_{th}q_{th} - p_{bh}q_{bh} \right) / \left( 1n\ p_{th}q_{th} - 1n\ p_{bh}q_{bh} \right) / \right. \\ \left. / \left( 1n\ \Sigma_h p_{th}q_{th} - 1n\ \Sigma_h p_{bh}q_{bh} \right) \right.$$

L'Indiç di Sato e Vartia (1976b) al cjape simpri la forme di une medie gjeometriche ponderade:

$$_bI_{tSV} = \Pi_h \left( p_{th} / p_{bh} \right)^{w_h} \tag{4.21}$$

ma cuntun sisteme di pês plui complès, par altri simpri fondât su mediis logaritmichis, che, in chest câs, si riferissin a frazions di spese che si marcaran cun $s_{th}$, jessint:

$$s_{th} = p_{th}q_{th} / \Sigma_h p_{th}q_{th} \tag{4.22}$$

Il sisteme dai pês esprimût in tiermins di frazions di spese al sarà dât di:

$$w_h = \left[ \left( s_{th} - s_{bh} \right) / \left( 1n\ s_{th} - 1n\ s_{bh} \right) \right] / \\ / \Sigma_h \left[ \left( s_{th} - s_{bh} \right) / \left( 1n\ s_{th} - 1n\ s_{bh} \right) \right]$$

La tierce classe di numars indiçs di considerâ in cheste analisi e je dade dai cussì clamâts «indiçs lineârs otimâi», che il plui cognossût al è chel di Theil (1960)[33]. Al è un insiemi di indiçs che a saltin fûr di procediments di otimizazion di cualchi funzion obietîf li che si considere dutis lis osservazions di presit e di cuantitât, disponibilis pe serie di periodis che si cjapin in considerazion. In cheste maniere si rigjavin dai indiçs bogns no dome par confronts binaris, ma ancje multiperiodâls e che a àn il vantaç di cjapâ dentri dutis lis informazions disponibilis tal periodi di timp considerât.

Theil (1960) tal proponi il so indiç al cjape la idee di un numar indiç di tip aritmetic, cun cheste forme:

$$_bI_{tTL} = \Sigma_h w_h \left( p_{th} / q_{bh} \right) \tag{4.23}$$

se i pês a son funzion dai presits al timp base, in cheste forme:

$$w_h = \alpha_h p_{bh} / \Sigma_h \alpha_h p_{bh}$$

al è pussibil scrivi il numar indiç secont chest rapuart:

$$_b I_{tTL} = \Sigma_h \alpha_h p_{th} / \Sigma_h \alpha_h p_{bh} \tag{4.24}$$

indulà che si pues indicâ il numeradôr ancje cun $P_t$ e il denominadôr cun $P_b$. Ducj i doi a son considerâts tant che indiçs assolûts, o indicadôrs di sintesi dai $H$ presits, che a àn di jessi trasformâts in indiçs relatîfs, di mût di verificâ lis proprietâts de identitât, ven a stâi che il numar indiç al timp base al cjape valôr unitari, e la proprietât de adimensionalitât, che e ridûs il numar indiç a numar pûr.

I indiçs assolûts $P$ a son rigjavâts cjapant par buine cheste relazion jenfri i presits individuâi e l'indicadôr di sintesi:

$$p_{th} = a_h P_t + u_{th} \tag{4.25}$$

indulà che cun $u_{th}$ si intint un tiermin di erôr o di disturp. I parametris $\alpha_h$ e $a_h$ si rigjaviju midiant di une operazion di minimizazion dai residuis che e ricjape il principi dai minimis cuadrâts, rindinti pussibil di costruî i indiçs assolûts e chei relatîfs dai presits.

La operazion di minimizazion e je fate tignint ad a ments ancje lis cuantitâts e i lôr indiçs assolûts $Q$.

I indiçs assolûts di presit $P$ e i indiçs assolûts di cuantitât $Q$ si rigjaviju midiant de stime dai parametris che e ven fûr de minimizazion di cheste sume di cuadrâts di scarts:

$$\Sigma_{r,s} \left( P_r Q_s - \Sigma_h p_{rh} p_{sh} \right)^2 = \min \ \left( \alpha_h, a_h, \beta_h, b_h \right) \tag{4.26}$$

metint in vore une cundizion di adatament che e cjate la sô justificazion intune specie di gjeneralizazion de proprietât de reversibilitât dai fatôrs.

Bisugne notâ che in tiermins di analisi multivariade chest al è avuâl a rigjavâ i indiçs assolûts di presit $P$ e di cuantitât $Q$ come autovetôrs che a corispuindin ai autovalôrs plui alts des matriçs, il prin di $VV'$ e chel altri di $V'V$, indulà che cun $V$ si intint la matriç prodot de matriç $P$ dai presits di ordin $(T + 1)xH$ e de matriç $Q$ des cuantitâts che i corispuint, clarementri dal stes ordin. In altris tiermins, si à $V = PQ'$, cun element gjeneric dât dal valôr $v_{rs} = \Sigma_h p_{rh} q_{sh}$.

I indiçs cussì rigjavâts a son identificâts cu la sigle BL, ven a stâi «*Best Linear*», su propueste di Theil (1960).

Si à viodût che il risultât di chestis stimis al è straviât, parcè che lis diferencis jenfri prodots dai indiçs assolûts di presit e cuantitât e i elements de matriç che e salte fûr dal prodot jenfri la matriç dai presits e la trasponude de matriç des cuantitâts a son sistematichementri positivis. Kloek e de Wit (1961)[34] a àn proponût di doprâ un procediment di stime dai minims cuadrâts condizionâts, indulà che il vincul al è dât de nulitât de sume des diferencis, che al è compagn di cjapâ par bon il fat che la proprietât de reversibilitât dai fatôrs e sedi verificade «in medie». In altris tiermins, bisugne rigjavâ i indiçs risolvint il probleme de minimizazion:

$$\Sigma_{r,s}\left(P_r\ Q_s - \Sigma_h p_{rh} q_{sh}\right)^2 = \min\ \left(\alpha_h, a_h, \beta_h, b_h\right) \tag{4.27}$$

cun vincul:

$$\Sigma_{r,s}\left(P_r Q_s - \Sigma_h p_{rh} q_{sh}\right) = 0 \tag{4.28}$$

I indiçs cussì rigjavâts a son clamâts BLAU, ven a stâi «*Best Linear Average Unbiased*».

Altris indiçs che si fondin su principis no tant diferents e a son chei proponûts di Faliva (1973)[35] e di Quintano (1974)[36].

Une altre metodiche simile a cheste categorie di numars indiçs e je chê che e previôt l'ûs de analisi de corelazion canoniche.

*4.2.4. La metodiche funzionâl.* La metodiche distributive e chê agregative a nassin di une impostazion indulà che i presits e lis cuantitâts a son cjapâts di par se, cun riferiment a un cos di bens za stabilîts tal lôr numar, cualitât e cuantitât, li che però no si considerin lis relazions che a passin jenfri chestis grandecis e soredut jenfri lis lôr variazions tal timp e tal spazi.

Secont une otiche forsit masse schematiche, si sosten che i numars indiçs che a nassin des impostazions di tip «statistic» no tegnin in nissune considerazion lis interrelazions che si disvilupin jenfri nivei dai presits e cuantitâts scambiadis par finalitâts di consum o di produzion e che a àn cjatât sistemazions concetuâls adatis te teorie dal compuartament dal consumadôr o dai compuartaments dai produtôrs. A chestis primis dôs impostazions, duncje, i fâs cuintri une plui adate che, aben che e sedi fondade su la teorie dal consum (tal câs a sedin bens di consum) o de produzion (tal câs che a sedin bens intermedis), e ven marcade tant che «economiche».

In efiets, ancje la metodiche «economiche», cemût che si viodarà, e à di ricori a formulazions esprimudis de cussì clamade «teorie statistiche» e a ogni mût si pues dimostrâ cemût che la plui part dai numars indiçs considerâts fin cumò tal ambit de metodiche distributive e di chê agregative a puedin vê une juste justificazion teoriche, dal moment che a puedin rapresentâ câs particolârs che a nassin di ipotesis specifichis su la funzion di utilitât.

Al è duncje miôr fevelâ di une metodiche «funzionâl»[37] invezit di une impostazion «economiche» che no je specifiche dai indiçs che cumò si cjaparan in considerazion.

L'implant concetuâl che al fâs di fonde a cheste impostazion al riclame une schirie di definizions e di proposizions che in sostance a nassin de teorie dal compuartament razionâl dal consumadôr[38].

Il consumadôr al è vuidât tal so compuartament di doi ordins di fatôrs. Prin di dut, des sôs dibisugnis, esprimudis in tiermins di preferencis, guscj e desideris, ven a stâi in tiermins di sodisfazion che un ben al pues dâ dopo di jessi stât doprât, e, par secont, des risorsis economichis che al à a disposizion par comprâ il ben e che a son misuradis cul rapuart jenfri il presit dal ben e il redit disponibil. In pratiche, il compuartament dal consumadôr al è vuidât de ricercje di un compromès jenfri lis sôs esigjencis di sodisfazion di dibisugnis e la sô capacitât di acuist.

Il prin ordin di fatôrs si tradûs te teorie de utilitât, dade de sodisfazion che ogni consumadôr al pues vê dal consum di ogni ben. Al è dificil dividi il nivel di sodisfazion rigjavât di un singul ben di chel che al ven dal consum di altris bens, par vie des tantis relazions che a lein i consums dai diviers bens. Come seconde robe, bisugne considerâ che in linie di massime si pues dîsi che il nivel di utilitât dal consumadôr al è funzion des cuantitâts consumadis. Chest al significhe che la utilitât si pues esprimi in tiermins di une funzion des diviersis cuantitâts, consideradis al timp $b$:

$$U_b = U\left(q_{b1}, q_{b2}, \ldots, q_{bh}, \ldots, q_{bH}\right) \tag{4.29}$$

Lis variabilis di cuantitât che a dan l'argoment de funzion no son indipendentis: a son dadis di un complès di relazions che a nassin, in pratiche, dai rapuarts di complementaritât e di sucedaneitât che a pein tra di lôr lis diviersis categoriis di bens. La funzion di utilitât e je une nozion teoriche che dificilmentri si pues tradusile in tiermins empirics, doprant la «teorie des preferencis riveladis» e lis indagjins consecuentis, che a puedin vê par ogjet i compuartaments reâi dai consumadôrs par chel che al inten il grât di sodisfazion rigjavabil dai diviers bens. La funzion e je costruide su la fonde di dôs ipotesis fondamentâls di partence: la prime, che il consumadôr al preferissi plui cuantitâts di bens rispiet a mancul cuantitâts. Chest al vûl dî che l'individui al rive a un nivel di utilitât plui alt cuant che almancul un dai bens che al da dongje il cos considerât al è disponibil in cuantitât superiôr rispiet a une situazion diferente, intant che chei altris bens a son presints in cuantitât no minôr. Par secont, si ipotize che dosis cressintis di un stes ben a causionin incressitis di sodisfazion decressintis.

Chestis ipotesis fondamentâls nus permetin di rigjavâ cualchi indicazion su la forme de funzion di utilitât: se riferide a un ben unic, cheste e pues jessi rapresentade in maniere grafiche midiant di une curve che e je cressinte al cressi des cuantitâts, ven a stâi che la derivade prime de funzion e je positive (prime ipotesi), intant che la utilitât margjinâl, dade de derivade de funzion di utilitât, e je decressinte (seconde ipotesi), o ben la derivade seconde de funzion e je negative. Se la funzion e à par argoment doi bens, e sarà rapresentade midiant di une estension che e varà di compuartâsi te stesse maniere. Al è clâr che chestis proprietâts a puedin jessi slargjadis al spazi ($H$ + 1) dimensionâl cuant che i bens considerâts a son in numar di $H$.

Il lûc dai ponts corispondents a une utilitât costante, ven a stâi la intersezion de estension di utilitât cuntun plan a coeficients nui, se proietât sul plan di definizion des cuantitâts, al rapresente une curve di indiference che e marche lis diviersis cumbinazions di cuantitât che a mantegnin la utilitât dal consumadôr costante.

La ipotesi di compuartament razionâl dal consumadôr, culì introdusude, e impliche che il singul individui al ledi a cirî chê cumbinazion di cuantitât che e permet di rindi massime la utilitât o la sodisfazion che si pues rigjavâ dai bens acuisîts.

A chest pont, a jentrin in zûc i ostacui che si metin tal mieç cuintri l'apaiament plen dal obietîf di massimizazion, ven a stâi i presits dai bens e il redit disponibil di bande dal consumadôr: i prins a dan i belançs singui dal consumadôr, peâts a ancjetantis cumbinazions des cuantitâts dai bens, intant che il secont al da il cussì clamât vincul di belanç.

Par ogni vetôr di cuantitât $q_b = (q_{b1}, q_{b2}, \ldots, q_{bh, \ldots} q_{bH})$, midiant de aplicazion dal vetôr dai presits $p_b = (p_{b1}, p_{b2}, \ldots, p_{bh, \ldots} p_{bH})$, si rigjave la spese necessarie par vê un ciert nivel di sodisfazion o utilitât:

$$ {}_b x_b = \Sigma_h p_{bh} q_{bh} \tag{4.30} $$

Al è un belanç particolâr dal consumadôr che, cjatant un limit superiôr tal redit disponibil ${}_b y_b$ misurât in tiermins monetaris corints, al da dongje il cussì clamât vincul dal belanç.

Stant ae ipotesi di compuartament razionâl dal consumadôr, bisugnarà sielzi chê cumbinazion di cuantitât di bens che e permet di massimizâ la funzion di utilitât. In altris tiermins, dât un sisteme di presits e un redit monetari limitât, si varà di cjatâ il vetôr di cuantitât che al salte fûr de soluzion di un probleme di massim condizionât:

$$ U(q_b) = U(q_{b1}, q_{b2}, \ldots, q_{bh}, \ldots, q_{bH}) = \max_q \tag{4.31} $$

cul vincul:

$$ \Sigma_h p_{bh} q_{bh} = {}_b y_b \tag{4.32} $$

Il vetôr des cuantitâts cjatât in cheste maniere (e che di un pont di viste analitic al è rigjavât doprant il metodi dai moltiplicadôrs di Lagrange, che al è sogjet a une interpretazion economiche specifiche, in tiermins di utilitât margjinâl dal redit) al sarà il pont di ecuilibri dal consumadôr. Pal teoreme dal ecuilibri dal consumadôr, si note che, cjapant i presits e il redit a disposizion tant che un dât, si costruìs il cos di mût che il saç margjinâl di sostituzion jenfri ducj i bens considerâts a doi a doi al sedi avuâl al rapuart jenfri i presits dai bens stes.

A chest pont, bisugne osservâ che cuant che si passe al timp *t*, al è clâr che a saran stadis des modifichis te struture dai presits, robe che e puartarà il consumadôr, simpri te ipotesi di un compuartament razionâl, a tornâ a definî il so plan di spese, cambiant cuantitâts di bens plui cjârs cun bens che a costin di mancul o che a àn vude une variazion in aument dai presits plui contignude. Il consumadôr al rivarà a un pont gnûf di ecuilibri cjatant un vetôr gnûf di cuantitât, che al sarà di gnûf fat di maniere di massimizâ la utilitât, viodût il vincul di belanç dât dal redit, che intratant al sarà ancje chel mudât. Se si à chê di rigjavâ une misure de variazion dai presits, invezit di mantignî lis stessis cuantitâts rilevadis tal timp di base o in chel di riferiment, la soluzion indicade secont la metodiche funzionâl, definide di Konüs (1924)[39], e je chê di cjapâ une spese che no modifichi la utilitât dal consumadôr, che si pues rigjavâle tal periodi di base *b* o in chel di riferiment *t*. Bisugne in altris tiermins mantignî compagne la utilitât $U_b$ riferide al timp base *b* o la utilitât $U_t$ dal timp di riferiment *t* e adotâ chel vetôr di cuantitât che, daûr dai presits indicâts dal marcjât, al sedi in grât di minimizâ la spese che e rive a sigurâ chel nivel di utilitât[40]. Si varà duncje di cjatâ il minim rispiet aes cuantitâts de funzion:

$$\Sigma_h p_{bh} q_{bh} = \min_q \tag{4.33}$$

cul vincul de costance de utilitât :

$$U(q_b) = U(q_{b1}, q_{b2}, \ldots, q_{bh}, \ldots, q_{bH}) = U^*_b \tag{4.34}$$

Doprant i moltiplicadôrs di Lagrange si verifiche che il vetôr des cuantitâts che si riferissin ae utilitât dal an base al à di sodisfâ chestis cundizions:

$$\begin{gathered} U\left(q_{b1},q_{b2},\dots,q_{bh},\dots,q_{bH}\right)=U\left(q^{(U*b)}{}_1,q^{(U*b)}{}_2,\dots,q^{(U*b)}{}_h,\dots,q^{(U*b)}{}_H\right) \\ dU/p_{t1}\ \ dq^{(U*b)}{}_1=dU/p_{t2}\ \ dq^{(U*b)}{}_2=\dots=dU/p_{tH}\ \ dq^{(U*b)}{}_H \end{gathered} \tag{4.35}$$

La spese minime necessarie a sigurâ un nivel di sodisfazion avuâl a $U_b$ e je dade di:

$${}_b x_b = \Sigma_h\ p_{bh} q_{bh} \tag{4.36}$$

intant che la spese minime a presits dal timp $t$ che varà di jessi sostignude par mantignî compagne la utilitât ancje al timp $t$ e sarà dade di:

$${}_b x^{(U*b)} = \Sigma_h\ p_{th} q^{(U*b)}{}_h \tag{4.37}$$

L'indiç di Konüs (1924), inalore, al saltarà fûr dal rapuart jenfri la spese minime, valutade a presits dal timp $t$ e necessarie a mantignî compagne la utilitât rigjavade al timp base $b$, e la spese rigjavade al stes timp $b$. Stant che il sisteme di ponderazion dai presits al risulte di une imobilizazion de utilitât al an base, il rapuart costruît in cheste maniere al è indicât come indiç di Konüs-Laspeyres (Benedetti 1962)[41]:

$${}_b I_{tKL} = \Sigma_h p_{th} q^{(U*b)}{}_h \,/\, \Sigma_h p_{bh} q_{bh} \tag{4.38}$$

Cambiant il riferiment temporâl de utilitât che e reste costante, ma peade al timp di riferiment $t$, si varà:

$${}_b I_{tKP} = \Sigma_h\ p_{th} q_{th} \,/\, \Sigma_h\ p_{bh} q^{(U*t)}{}_h \tag{4.39}$$

Al è l'indiç di Konüs-Paasche (Benedetti 1962), caraterizât di un sisteme di ponderazion variabil, jessint leât al timp di riferiment $t$. Di chi e salte fûr la relazion cul analic indiç agregatîf di Paasche (1874).

I indiçs cussì proponûts si fondin su di un telâr economic salt, dât de teorie de utilitât margjinâl e dal compuartament razionâl dal consumadôr, cjapant par bon il fat che chest si compuarti in maniere di sielzi il plan otimâl di spese. Dut câs, ae aplicazion pratiche di chescj indiçs i da cuintri dute une schirie di problemis di no facile soluzion, sedi dal pont di viste teoric che di chel operatîf. A son problemis leâts ae agregabilitât des funzions di utilitât, ae specificabilitât des lôr formis analitichis e, par ultin, ae misurabilitât de utilitât.

Il probleme de agregabilitât al nas dal fat che i fondaments concetuâi dai indiçs funzionâi si fondin su la teorie de utilitât, che e inten il compuartament dal singul consumadôr. L'indiç dai presits che si rigjave al è adat a misurâ lis variazions dal podê di acuist di ogni consumadôr che si à rivât a determinâi la funzion di utilitât. Chel che invezit al interesse al è di costruî un strument di misure bon par plui consumadôrs, considerâts pe apartignince a dut il sisteme economic, in dute la lôr totalitât o almancul par categoriis specifichis di consumadôrs.

Al nas alore il probleme di determinâ un sisteme di pês in tiermins di cuantitât a utilitât costante no dome par un sôl consumadôr, ma par un coletîf, nol interesse trop grant, che al à bisugne di une trasposizion de dimension microeconomiche a chê macroeconomiche.

Il probleme si risolvilu cjapant diviersis stradis che no son dut câs cence difiets. De assunzion dal consumadôr rapresentatîf, che la sô funzion di utilitât e à di jessi avuâl o pûr rapresentative di une pluralitât di funzions di utilitât, a procediments di agregazion des utilitâts individuâls, al ûs di procediments di agregazion sugjerîts de economie dal benstâ tal moment che si passe di situazions ugnulis di benstâ individuâl a nozions agregadis di benstâ coletîf: lis soluzions a son cetantis e dutis dut câs discutibilis.

Il probleme di specificâ une forme de funzion di utilitât che e premeti di rigjavâ il sisteme di cuantitât a utilitât costante al è peât a strent cun chel de osservabilitât dai nivei di sodisfazion.

Cualchi cundizion fondamentâl imponude de teorie economiche in teme di compuartament dal consumadôr e met in lûs un ciert numar di carateristichis essenziâls de funzion di utilitât, che a laran a influî su la forme de curve di indiference che e descrîf la relazion jenfri la cuantitât consumade di un ben e lis cuantitâts di chei altris bens a un ciert nivel di utilitât costante: cualsisei al sedi il sisteme dai guscj dal consumadôr, si cjape par bon che la utilitât e cressedi al cressi de cuantitât dal ben e che la utilitât margjinâl e sedi decressinte: in tiermins analitics, chest al vâl a dî che la funzion e à di presentâ, in ognidun dai siei ponts, derivade prime positive e derivade seconde negative. Su la fonde di chestis cundizions e ancje di altris si pues considerâ formis alternativis de funzions di utilitât. Ognidune di chestis e justifiche une forme divierse dal indiç componût dai presits costruît daûr de metodiche economiche. Lis formis plui frecuentis a son chestis, in riferiment al timp di base $b$:

a) funzion lineâr omogjenie:

$$U\left(q_b\right)=U\left(q_{b1},q_{b2},\ldots,q_{bh},\ldots,q_{bH}\right)=\Sigma_h\ w_h\ q_{bh} \qquad (4.40)$$

indulà che cun $w_h$ si indiche un sisteme di pês, di maniere che $w_h>0$ e $\Sigma_h\, w_h = 1$. E je une funzion proponude di Samuelson e Swamy (1974)[42] e si pues dimostrâ che, cuntune sielte juste dai pês, une funzion di utilitât di cheste forme e da une spiegazion economiche sedi al indiç di Laspeyres (1871), sedi a chel di Paasche (1874);

b) funzion moltiplicative:

$$w_h = P_h\ q_{bh}{}^{wh} \qquad (4.41)$$

e je une funzion di utilitât dal tip Cobb-Douglas che e justifiche la costruzion di numars indiçs componûts di tip gjeometric;

c) funzion trassendentâl logaritmiche:

$$\begin{aligned}&1n\ U\left(q_b\right)=1n\ U\left(q_{b1},q_{b2},\ldots,q_{bh},\ldots,q_{bH}\right)=\\&=a+\Sigma_h w_h 1n\ q_{bh}+1/2\left(\Sigma_h\Sigma_k\ w_{hk}\ 1n\ q_{bh}\ 1n\ q_{bk}\right)\end{aligned} \qquad (4.42)$$

indulà che bisugne rispietâ chest sisteme di vincui: $\Sigma_h\ w_h = 1$, $\Sigma_k\ w_{hk} = 0$ e $w_{hk} = w_{kh}$ par cualsisei $h = 1, 2, \ldots, H$. E je une funzion di utilitât proponude di Christensen, Jorgenson e Lau (1971)[43] che e rive a justificâ l'indiç proponût di Törnqvist (1936):

d) funzion logaritmiche:

$$U(q_b) = U(q_{b1}, q_{b2}, \ldots, q_{bh}, \ldots, q_{bH}) = \Sigma_h \; w_h \; 1n(q_{bh} - a_h) \qquad (4.43)$$

a valin lis solitis cundizions par $w_h$ intant che $a_h > 0$ e $(q_{bh} - a_h) > 0$. E je la funzion di utilitât proponude di Geary-Stone (1944)[44].

Chestis e altris formulazions a son stadis proponudis soredut par dâ une justificazion teoriche ai numars indiçs presentâts al principi su la fonde de metodiche distributive e di chê agregative. Magari cussì no, in cetancj câs al è dificil verificâ in maniere empiriche chestis ipotesis funzionâls.

Chel de misurabilitât de utilitât al somee il probleme plui grues che al inderede l'ûs de impostazion funzionâl[45]. Par frontâ chest probleme delicât si è lâts indenant par cinc diviersis stradis.

La prime e je chê di fâ di mancul di misurâ la utilitât in tiermins intervalârs (utilitât metriche) o razionâls (utilitât cardinâl) e duncje di variabil, fasint riferiment invezit a di un esam des diviersis carateristichis de utilitât associadis a sogjets diferents, sot forme di ordenament sempliç. In altris peraulis, si ricognòs la impussibilitât di dâ une misure dai diviers nivei di sodisfazion par sogjet singul in situazions diviersis o pûr par plui sogjets, câs une vore impuartant par costruî i numars indiçs che si riferissin a agregâts di consumadôrs, e si limitisi a ordenâ lis utilitâts considerantlis in tiermins di mutabilis in scjale ordenâl (unitât ordenâl).

La seconde strade e je propit chê di cirî di misurâ i nivei di sodisfazion rigjavâts di ogni consumadôr in ciertis cundizions, midiant di indagjins campionariis. Bisugne risolvi i problemis di determinazion aprossimade de utilitât doprant la teorie des preferencis rilevadis e lis indagjins campionariis che i derivin e che a smirin a furnî dâts di tip cualitatîf che a permetin di ricostruî i nivei di sodisfazion.

E je une tierce strade che e je chê di costruî la utilitât par vie indirete, passant pe costruzion econometriche des funzions di domande. Cun di fat, si sa ben che, stant ae teorie de domande, la cuantitât di un ben acuisît dal consumadôr e dipent di trê fatôrs fondamentâi: i guscj e lis dibisugnis dal consumadôr, che si tradusin te utilitât, il sisteme dai presits dai bens in vore sul marcjât e, par ultin, il nivel dal redit disponibil. La funzion di domande par un consumadôr che al à un ciert sisteme di preferencis, duncje, e je dade de funzion di utilitât e si esprimile cussì:

$$q_{th} = f\left(p_{t1}, p_{t2}, \dots, p_{th}, \dots, p_{tH}; {}_t y_t; u_t\right) = f\left(p_t; {}_t y_t; u_t\right) \tag{4.44}$$

La utilitât, par altri, e je di par se funzion dal vetôr des cuantitâts. Passant ae massimizazion de funzion di utilitât par un ciert nivel di redit (vincul di belanç), si pues esplicitâ la forme funzionâl de curve di domande e lâ indenant te stime dai parametris, su la fonde di une serie storiche dai presits e des cuantitâts (e in câs plui complicâts ancje dai redits). Costruide la funzion di domande te sô specificazion funzionâl e tai valôrs di stime dai parametris, cun cualchi procediment statistic une vore cognossût (minims cuadrâts o massime verisomeance), si pues rigjavâ par vie indirete la funzion di utilitât. Su la fonde de cognossince di cheste, si pues indicâ la funzion di agregazion dai presits che e dedi il numar indiç plui just pe situazion particolâr.

Cheste strade, par esempli, e je stade doprade par stimâ la utilitât che e cjape une forme logaritmiche dal tip za considerât. Par marcâ lis grandecis che si presentin come parametris, cheste forme si scrivarà cussì:

$$U\left(q_t\right) = U\left(q_{t1}, q_{t2}, \dots, q_{th}, \dots, q_{tH}\right) = \Sigma_h \; b_h \; 1n\left(q_{th} - a_h\right) \tag{4.45}$$

E va daûr aes cundizions za fissadis, duncje $\beta_h > 0$, $\Sigma_h \beta_h = 1$, $\alpha_h < 0$, $(q_{th} - \alpha_h) < 0$.

Cuant che si passe ae massimizazion de funzion di utilitât sot cundizion dal vincul di belanç dât di un redit a disposizion pal consum, mantignût costant e metût di valôr $\delta$, si rigjave cheste funzion di domande:

$$q_{th} = \alpha_h - \beta_h \,/\, p_{th} \;\left(\delta - \Sigma_h p_{th} q_{th}\right) \tag{4.46}$$

Fasint une stime dai doi parametris su la fonde di une serie storiche che e rivuarde presits e spese e cambiant te funzion di utilitât la funzion di domande cussì stimade, si varà:

$$U(q_t) = U(q_{t1}, q_{t2}, \ldots, q_{th}, \ldots, q_{tH}) = B^{-1}(d - A) \tag{4.47}$$

indulà che al risulte $1n\ B = \Sigma_h \beta_h\ 1n\ (p_{th}/b_h)$.

Un percors analic si pues fâlu pe costruzion di altris funzions di utilitât che, dut câs, a àn bisugne fin dal principi di une sielte de specificazion matematiche di indulà rigjavâ la funzion di domande corispondente che e nas di une operazion di massimizazion a spese costante. Dut câs, la pussibilitât di lâ indenant par vie indirete intune costruzion de funzion di utilitât te suaze di une forme funzionâl specifiche e vierç la strade par fâ des verifichis su la conformitât de forme sielzude aes evidencis empirichis, dadis di dâts storics o sezionâi.

E je ancjemò une cuarte strade, che e pues jessi chê de variabil «*proxy*». Stant che la utilitât e je in pratiche une variabile no osservabile, si sostituissile cuntune variabile misurabile che in cualchi maniere e je leade ae utilitât. E pues jessi la cuantitât stesse, si che duncje, intune ipotesi di semplificazion estreme, si à $u_{th} = q_{th}$, tornant in cheste maniere ae ipotesi dal cos costant, di li che e nas sedi la soluzion di Laspeyres (1871), sedi chê di Paasche (1874). A puedin ancje jessi variabilis sielzudis volte par volte in maniere di dâ une version agregade des cuantitâts, che e riclamedi in cualchi maniere la idee di sodisfazion che il sogjet al à dal consum di une cierte panarie di bens: tal câs di mangjative, cualchi volte si à considerât il contignût caloric dai diviers bens, fasint coincidi la variabil «caloriis» cul nivel di sodisfazion. La utilitât, duncje, e je stade pareade a di une funzion lineâr omogjenie di cheste fate:

$$U(q_t) = U(q_{t1}, q_{t2}, \ldots, q_{th}, \ldots, q_{tH}) = \Sigma_h\ c_h\ q_{th} \tag{4.48}$$

indulà che cun $c_h$ si indiche il numar di caloriis unitariis par unitât di misure des cuantitâts che e esprim i diviers gjenars alimentârs. In cualchi câs, par altris bens, definîts su la fonde di cualchi carateristiche comun, come funzions o come classis di dibisugnis che i stes bens a sodisfin, si pues pensâ a altris variabilis approssimantis e a altris coeficients che a permetedin la agregazion di un vetôr intun scalâr che al esprimedi in maniere plui o mancul direte la sodisfazion che il consum al prodûs pal singul sogjet.

Par sierâ, e je une ultime strade di podê cjapâ e che si pee, dut câs, ai risultâts di une indagjin empiriche che al à par ogjet variabilis di compuartament dal consumadôr. Stant che la utilitât e je une variabil no osservabile, si pues sugjerî di provâ a aplicâ cualchi tecniche multivariade, pensade di pueste par fâ saltâ fûr di une batarie di variabilis osservabilis e esprimibilis une cualchi dimension parziâl e limitade di une grandece no osservabile, la stesse variabile che no pues jessi ogjet diret di misurazion. Si vierç duncje la strade ae aplicazion de analisi dai fatôrs, o ae analisi des componentis principâls o ancje, in cualchi situazion particolâr, ae analisi de corelazion canoniche.

*4.2.5. La metodiche assiomatiche.* La ricercje des proprietâts formâls e soredut des cundizions che a varessin di jessi sodisfatis dai cetancj numars indiçs proponûts pe sintesi dai numars indiçs elementârs e pe misure des variazions dal podê di acuist de monede, che si fevelarà tal prossim cjapitul, e à puartât ae definizion di un pâr di sistemis di cundizions che a àn causionât la propueste di une gnove impostazion pe costruzion di numars indiçs dai presits, la cussì clamade impostazion assiomatiche.

Te stesse maniere dal câs dai numars indiçs in gjenerâl, che si à fevelât prime, al è di fat pussibil definî un insiemi di proprietâts formâls, consideradis zovevulis o preferibilis par costruî un sisteme di numars indiçs in grât di ufrî misuris adatis des variazions dai presits in ciertis situazions, di mût di dedusi i indiçs desiderâts, che a sedin caraterizâts des justis proprietâts.

Il disvilup dai studis sui sistemis di cundizions formâls al introdûs cetancj sugjeriments pe costruzion di une teorie assiomatiche. Za Pfouts tal 1966[46] al proponeve *An axiomatic approach to index numbers*; i lavin daûr i contribûts di Eichhorn e Voeller dal 1976[47], e chei metûts adun di Eichhorn tal 1978[48]. Di resint, chescj contribûts a son stâts sistemâts in maniere organiche di Martini (1992)[49].

Invezit di costruî i numars indiçs su la fonde di considerazions economichis o statistichis, in cheste impostazion si à miôr definî un sisteme di cundizions assiomatichis par dedusi des stessis un sisteme di numars indiçs che a podedin jessi doprâts cuant che si prospetin specifichis cundizions empirichis.

Il sisteme di assiomis definît di Pfouts (1966) al è chest:

A.1. Internalitât

$$\min\left(p_{th}/p_{bh}\right) < {}_bI_t < \max\left(p_{th}/p_{bh}\right) \qquad \forall\, h \tag{4.49}$$

Al è clâr che il significât di cheste cundizion, che e impon che il numar indiç componût al sedi cjapât dentri intun cjamp di variazion che al vedi tant che estrem inferiôr l'indiç elementâr che al segne la variazion minime e par estrem superiôr chel che al misure la variazion massime rispiet al stes timp base *b*. Cheste cundizion e individue une classe une vore slargjade di funzions, che e je dade des mediis.

A.2. Omogjeneitât

$${}_bI_t\left(\lambda\, p_t, p_b\right) = \lambda\; {}_bI_t\left(p_t, p_b\right) \tag{4.50}$$

Se ducj i numars indiçs elementârs si ju moltipliche par un coeficient positîf, ancje il numar indiç componût al mude daûr dal stes coeficient:

Cheste condizion e permet di limitâ la classe des funzions di agregazion che si puedin aplicâ e che si limitin duncje aes mediis omogjeniis, che, cemût che si sa, a son dadis des mediis di potence, cun esponent gjeneric *r*. Dant valôrs particolârs a *r*, si cjatin la medie aritmetiche (cun $r = 1$), chê gjeometriche (cun $r \to 0$), chê armoniche (cun $r = -1$), chê cuadratiche (cun $r = 2$) e vie indenant.

A.3. Aditivitât

Se si zonte une cuantitât costante $\lambda$ a ognidun dai presits, il numar indiç dai presits cussì aumentâts al è avuâl al numar indiç dai presits di partence aumentât dal numar indiç otignût considerant la costante tant che un insiemi di presits:

$${}_bI_t\left(\lambda + p_t, p_b\right) = {}_bI_t\left(p_t, p_b\right) + {}_bI_t\left(\lambda, p_b\right) \tag{4.51}$$

La desiderabilitât di cheste proprietât e je clare, stant che e esprim une cundizion sigure di aditivitât. Tignint ad a ments i compuartaments des mediis di potencis rispiet a trasformazions di origjin, si pues capî subite che la classe des funzions di agregazion dade di chestis mediis si strenç a chê des mediis aritmetichis ($r$ = 1).

A.4. No singolaritât

La matriç di dimension $(T + 1)x(T +1)$ che e à riis dadis dai numars indiçs cun base compagne e colonis dadis dai numars indiçs cun stes periodi di riferiment e je une matriç no identichementri singolâr: cheste cundizion e zove a garantî che no sedin relazions lineârs jenfri numars indiçs cul stes periodi di base che a rindaressin artificiâls lis restrizions che si vessin di introdusi.

Su la fonde di chestis cuatri cundizions si pues sielzi une classe avonde limitade di numars indiçs, tant che chei di Laspeyres (1871), di Paasche (1874), di Edgeworth (1925) e di Theil (1960).

Un secont sisteme di assiomis al è proponût di Eichhorn e Voeller (1976) pai numars indiçs di presits che a tegnin cont ancje des cuantitâts. I assiomis si puedin duncje definî in cheste maniere:

B.1. Monotonicitât

Il numar indiç al è une funzion cressinte strentementri rispiet al vetôr dai presits al timp di riferiment e decressinte strentementri rispiet al vetôr dai presits al timp di base:

$$\begin{aligned} {}_bI_t(\delta p_t) &> {}_bI_t(p_t) \qquad \delta>1 \\ {}_bI_t(p_b) &< {}_bI_t(\delta p_b) \qquad \delta>1 \end{aligned} \tag{4.52}$$

B.2. Omogjeneitât

Se ducj i presits al timp di riferiment a son moltiplicâts par un coeficient positîf λ, ancje il numar indiç al mude te stesse proporzion:

$${}_bI_t(\lambda p_t) = \lambda\ {}_bI_t(p_t) \qquad \lambda > 0 \tag{4.53}$$

Al è un assiome che al ven clamât ancje di proporzionalitât, stant che se ducj i presits a mudin te stesse proporzion ancje la funzion dai presits e des cuantitâts e mude in chê proporzion.

B.3. Identitât
Se ducj i presits a restin costants, il numar indiç al è avuâl ae unitât:

$$ {}_bI_b\left(p_b, p_b\right) = 1 \qquad (4.54) $$

B.4. Dimensionalitât
Une trasformazion de unitât di misure dai presits no mude il numar indiç:

$$ {}_bI_t\left(\lambda p_t, \lambda p_b\right) = {}_bI_t\left(p_t, p_b\right) \qquad \lambda > 0 \qquad (4.55) $$

In altris peraulis, il numar indiç nol è sensibil ae trasformazion di scjale de variabil presit.

B.5. Comensurabilitât
Une trasformazion de unitât di misure des cuantitâts e dai presits no à influence sul numar indiç:

$$ {}_bI_t\left(\lambda^{-1} p_t, \lambda^{-1} p_b; \lambda q_t, \lambda q_b\right) = {}_bI_t\left(p_t, p_b; q_t, q_b\right) \qquad \lambda > 0 \qquad (4.56) $$

In altris peraulis, il numar indiç nol è sensibil ae trasformazion di scjale des unitâts di misure des cuantitâts.

A son i cinc assiomis fondamentâi che un teoreme cjatât di Eichhorn e Voeller (1976) al à dimostrât jessi indipendents, tal sens che ognidun dai cuatri assiomis al pues jessi apaiât di funzions dai presits e des cuantitâts che no rivin a sodisfâ l'assiome che al vanze[50].

Pe definizion dade une cualsisei funzion dai presits e des cuantitâts rilevadis tal periodi di base e in chel di riferiment e rapresente un numar indiç componût dai presits se e sodisfe tal stes moment chestis cinc proprietâts. Definîts duncje i cinc assiomis, si pues dedusi funzions che a rispuindin a recuisîts o a situazions particolârs. In cheste maniere si pues rigjavâ un sisteme avonde articolât di numars indiçs che si puedin aplicâ pe soluzion di problemis specifics: si à a ce fâ, in particolâr, cui indiçs di Laspeyres (1871), di Paasche (1874), di Edgeworth (1925) e, cun di plui, cul indiç «ideâl» di Fischer (1922), che al è dât de medie gjeometriche di un indiç di Laspeyres e di un indiç di Paasche.

Il sisteme di assiomis presentât di Martini (1992) al presente cualchi diference, stant che al cjape une definizion gjenerâl di numar indiç dai presits, intindût tant che une funzion:

$$ {}_bI_{t(q)} = f\left(p_t, p_b; \Phi\right) \tag{4.57} $$

e il so cofatôr tant che une funzion:

$$ {}_bI_{t(q)} = g\left(q_t, q_b, p_t, p_b; \Phi\right) \tag{4.58} $$

indulà che cun $q_t$, $q_h$ si intindin i vetôrs des cuantitâts ai doi timps di base e di riferiment, cun $p_t$, $p_b$ i vetôrs dai presits che ur corispuindin e cun $\Phi$ un sisteme di pês che a mudin i cuatri vetôrs intun scalâr. Al è clâr che il cofatôr di un numar indiç dai presits al è il numar indiç des cuantitâts corispondent. A cheste funzion i si domande prin di dut di sodisfâ i assiomis di identitât, di comensurabilitât e di omogjeneitât. I si domande dopo, tant che cundizion di coerence interne, di sodisfâ la cundizion di associativitât, che e impliche sedi la monotonicitât che la internalitât.

*4.3. Lis proprietâts formâls dai numars indiçs dai presits*

*4.3.1. Premesse.* La molteplicitât des propuestis fatis di plui di un secul di cui che al smire a costruî un strument adat pe misure des variazions dai nivei gjenerâi dai presits e à puartât di cetant timp al probleme de sielte jenfri lis alternativis diviersis e pussibilis.

I criteris di sielte a puedin jessi diviers, dal moment che a puedin integni i fondaments economis, la interpretabilitât di cualchi formulazion, i criteris di ponderazion doprâts, o la presince di cualchi proprietât formâl considerade desiderabile soredut pe aplicazion o pe facilitât di calcul.

La strade dal studi dai compuartaments dai numars indiçs par dibisugnis di calcul e di corispondence a cundizions formâls e à dade la ocasion di fâ dai aprofondiments impuartants su lis carateristichis formâls des funzions di agregazion dai presits. Un interès particolâr si lu à dât ae consistence di sistemis di proprietâts formâls e ae lôr indipendence reciproche. Il dibatiment al à puartât a meti in lûs cundizions formâls no indipendentis, o incompatibilis o impussibilis o irilevantis e al à vût tant che conclusion naturâl il tentatîf di esprimi i numars indiçs tant che sistemis di assiomis, dant vite ae metodiche assiomatiche, za considerade tes pagjinis indaûr.

Cemût che si à za viodût, dome pai numars indiçs elementârs un sisteme di assiomis al permet di costruî un strument unic di misurazion des variazions relativis. I diviers sistemis di cundizions formâls presentâts fin cumò a àn permetût dome di ridusi lis funzions pussibilis a classis avonde limitadis ma che distès no rivin a puartâ a une uniche forme funzionâl che e rapresenti la soluzion miôr in assolût.

Chescj sistemis a finissin par vê un rûl negatîf, rapresentant une sorte di gridele, che e permet di scartâ un ciert numar di soluzions che a somein buinis dome par un numar scjars di cundizions o dut câs dome par chês ritignudis impuartantis di cualchi pont di viste.

*4.3.2. Il sisteme di cundizions formâls di Fisher.* Di Irving Fisher (1911)[51] al ven un prin tentatîf sistematic di delineâ un insiemi di proprietâts par soponi a verifiche il numar grues di funzions di agregazion dai presits pussibilis di doprâ tant che strument di misure des variazions dai presits. Tal so volum dal 1911, intitulât *The purchasing power of money*, Fisher al frontave za cun bondance il probleme de costruzion di numars indiçs dai presits e des cundizions formâls di rispietâ, definint vot provis di someti ai indiçs proponûts. Tal so fondamentâl *The making of index numbers* dal 1922 al tornave a cjapâ l’argoment, frontant in maniere detaiade la cuistion e sometint fintremai 134 diviersis formulazions pussibilis dal propri sisteme di *test*, che però al lassave fûr chel de circolaritât, preferint risiervâ une atenzion particolâr aes cundizions di reversibilitât dai timps e soredut dai fatôrs.

Il sisteme di *test* di Fisher al è dât di chestis proprietâts formâls:

F.1. Identitât
Se ducj i presits a restin costants, il numar indiç al è avuâl ae unitât:

$$ {}_{b}I_{b}\left(p_{b}, p_{b}\right) = 1 \tag{4.59} $$

che al è il stes di dî che il confront jenfri dôs situazions identichis al puarte a un numar indiç unitari; cheste cundizion formâl e je za stade considerade tant che un assiome che, metût dongje di chei altris, al puarte a une misure dade dal rapuart jenfri lis dôs grandecis metudis a confront, e duncje al numar indiç elementâr.

F.2. Reversibilitât rispiet ai bens
Il numar indiç al è indipendent dal ordin che si considerin i bens, ven a stâi che:

$$ {}_{b}I_{t}\left(p_{th_i}, p_{bh_i}\right) = {}_{b}I_{t}\left(p_{th_j}, p_{bh_j}\right) \qquad \forall \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \tag{4.60} $$

F.3. Reversibilitât rispiet ai timps
Il numar indiç al timp *t* di base *b* al è avuâl al reciproc dal numar indiç al timp *b* di base *t*:

$$ {}_{b}I_{t}\left(p_{t}, p_{b}\right) = 1 / \ {}_{t}I_{b}\left(p_{b}, p_{t}\right) \tag{4.61} $$

che al è avuâl a:

$$ {}_{b}I_{t}\left(p_{t}, p_{b}\right) \ {}_{t}I_{b}\left(p_{b}, p_{t}\right) = 1 \tag{4.62} $$

E je ben clare la impuartance di cheste proprietât che e permet di passâ cun facilitât di une base a chê altre.

F.4. Reversibilitât rispiet ai fatôrs
Un numar indiç dai presits al è reversibil rispiet ai fatôrs cuant che il so prodot pal numar indiç des cuantitâts che i corispuint al è avuâl al indiç di valôr:

$$ {}_{b}I_{t}\left(p_{t}, p_{b}\right) {}_{b}I_{t}\left(q_{t}, q_{b}\right) = \Sigma_{h} p_{th} q_{th} / \Sigma_{h} p_{bh} q_{bh} \tag{4.63} $$

La impuartance di cheste proprietât, clamade ancje di «decomponibilitât rispiet aes causis» e salte fûr cun clarece se si pense che e permet di scomponi la variazion di un agregât reâl esprimût in tiermins monetaris tes dôs fonts di variabilitât, chê dai presits e chê des cuantitâts: cheste proprietât cualchi volte e je presentade in dôs versions diferentis: a) reversibilitât «debile», cuant che dut câs si pues esprimi l'indiç di valôr tant che prodot di un indiç dai presits e di un indiç des cuantitâts, cualsisei forme funzionâl al vedi chest ultin; b) reversibilitât «fuarte», cuant che l'indiç di cuantitât si cjatilu scambiant i presits cu lis cuantitâts, ven a stâi cuant che l'indiç di cuantitât al è de stesse forme funzionâl dal indiç dai presits.

F.5. Circolaritât

Dâts doi indiçs de stesse forme funzionâl, un di base *b* al timp *r* e un di base *r* al timp *t*, chescj doi a gjoldin de proprietât di circolaritât se il lôr prodot al permet di rigjavâ un numar indiç di base *b* al timp *t*:

$$ {}_bI_r\left(p_r,p_b\right)\ {}_rI_t\left(p_t,p_r\right)= {}_bI_t\left(p_t,p_b\right) \tag{4.64}$$

Al è clâr che cheste proprietât e je cetant impuartante cuant che si vûl passâ di doi indiçs di timps e basis diviers a un tierç indiç che al à par base chê dal prin indiç e par timp di riferiment chel dal secont indiç. Cuntun indiç che al gjolt di cheste proprietât si pues costruî concatenazions zovevulis jenfri i indiçs a base mobile. Un altri motîf di interès al ven dal so leam cun dôs cundizions precedentis: la identitât e la reversibilitât dai timps a son cun di fat implicadis dentri de circolaritât, aben che nol sedi vêr il contrari. Di fat, esprimint i indiçs in forme semplificade, par $r = t$,

$$ {}_bI_t\ {}_tI_t = {}_bI_t \tag{4.65}$$

e duncje al à di jessi par fuarce:

$$ {}_tI_t = 1 \tag{4.66}$$

intant che par $b = t$ si à:

$$ {}_{t}I_{r}\,{}_{r}I_{t} = {}_{t}I_{t} = 1 \qquad (4.67) $$

e di chi, la proprietât de reversibilitât dai timps:

$$ {}_{r}I_{t} = 1 / {}_{t}I_{r} \qquad (4.68) $$

No cate la sô impuartance evidente, cheste proprietât e je stade metude in discussion e bandonade di Fisher tal volum dal 1922, forsit parcè che e je la uniche proprietât che no je sodisfate dal so indiç «ideâl».

F.6. Proporzionalitât
Se ducj i presits a mudin secont di un stes fatôr λ, ancje il numar indiç al mude te stesse proporzion, deventant compagn di λ:

$$ {}_{b}I_{t}\left(\lambda p_{b}, p_{b}\right) = \lambda \qquad (4.69) $$

F.7. Determinatece
Un numar indiç al gjolt di cheste proprietât se nol devente nul, o infinît o indeterminât cuant che un singul presit si anule:

$$ \begin{aligned} {}_{b}I_{t}\left(p_{t}, p_{b}\right) &> 0 \qquad & \mathrm{p}_{th} \geq 0,\ \mathrm{p}_{bh} \geq 0 \\ {}_{b}I_{t}\left(p_{t}, p_{b}\right) &< \infty \qquad & \mathrm{p}_{th} \geq 0,\ \mathrm{p}_{bh} \geq 0 \end{aligned} \qquad (4.70) $$

F.8. Insensibilitât aes variazions dal numar dai bens
Il numar indiç al gjolt di cheste proprietât se l'inseriment o la eliminazion di un ben, che il so presit al cambie te stesse proporzion dal agregât intîr, nol modifiche l'indiç stes:

$$ {}_{b}I_{t}\left(p_{t*}, p_{b*}\right) = \left(p_{th*} / p_{bh*}\right) {}_{b}I_{t}\left(p_{t}, p_{b}\right) = {}_{b}I_{t}\left(p_{t}, p_{b}\right) \qquad (4.71) $$

Al è il cussì clamât «*Withdrawal or entry test*» di Fisher.

F.9. Comensurabilitât
Une trasformazion de unitât di misure des cuantitâts no mude il numar indiç:

$$
\begin{aligned}
{}_{b}I_{t}\left[<\lambda^{-1}>p_{t},<\lambda^{-1}>p_{b};<\lambda>q_{t},<\lambda>q_{b}\right] \\
={}_{b}I_{t}\left(p_{t},p_{b};q_{t},q_{b}\right) \qquad \lambda>0
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

In altris tiermins, il numar indiç nol è sensibil aes trasformazions des unitât di misure dopradis par esprimi lis cuantitâts dai bens considerâts e introdusudis cuant che si fasin des variazions di misure dentri dal sisteme stes (passant di une unitât di misure a un so multipli o sotmultipli) o jenfri sistemis diferents (par esempli, di chel decimâl a chel anglosasson). Cuant che si àn chestis modificazions di scjale, il numar indiç al à di jessi esprimût intune forme funzionâl che e siguri la sô invariance rispiet a chestis trasformazions.

Il sisteme di cundizions formâls cussì descrivût e cetant nomenât al è passât sot di tantis verifichis, di mût di meti in lûs di une bande il so grât di completece e di chê altre il nivel di coerence interni. Cetancj studiôs a àn esprimût in maniere divierse cualchidune di chestis proprietâts, indi àn spiegât cualchi carateristichis e il significât e soredut indi àn scandaiât lis relazions e il grât di compatibilitât e di indipendence reciproche.

I contribûts plui grancj a chest rivuart si ju à vûts di Haberler (1927)[52], Frisch (1936), Wald (1937)[53], Benedetti (1962), Swamy (1965)[54], Samuelson e Swamy (1974)[55], Eichhorn e Voeller (1976) e, par ultin, di Martini (1992).

In particolâr, al è in gracie di Frisch (1936)[56] che si à un scrutini sistematic des carateristichis dal sisteme di Fisher (1922), indulà che in sostance si frontin cuistions che a integnin la struture che a àn di vê i numars indiçs par sodisfâ proprietâts ugnulis o lôr insiemis, lis situazions di implicazion e lis cundizions di incompatibilitât jenfri lis proprietâts formâls. Frisch al presente in particolâr: a) lis consecuencis che a vegnin de proprietât de comensurabilitât; b) la struture che al à di vê un indiç par sodisfâ la proprietât di circolaritât; c) la forme che e al à di vê un indiç par sodisfâ tal stes timp lis proprietâts di circolaritât e di comensurabilitât, e cun di plui la presince de circolaritât, de comensurabilitât e de reversibilitât dai fatôrs tal stes moment. In pratiche al dimostre la impussibilitât di cjatâ un indiç che al sodisfi tal stes timp la proprietât di comensurabilitât, di determinatece, di circolaritât e di reversibilitât rispiet ai fatôrs. Te stesse maniere, si dimostre che la comensurabilitât, la determinatece e la circolaritât no puedin jessi sodisfatis tal stes timp di un stes indiç. Cualchidun di chescj risultâts si fonde su di un teoreme di no esistence che però Eichhorn (1976) al à dimostrât jessi inacetabil.

Wald (1937) al à dât altris contribûts dimostrant un teoreme di no esistence par un altri insiemi di cundizions formâls di Fisher (1922). Altris contribûts di preseâ a son stâts dâts di Swamy (1965), che al à mostrât un teoreme di no esistence par un altri insiemi di proprietâts.

Il significât e la rilevance di cualchi prove a son stâts frontâts di cetancj autôrs. La proprietât de circolaritât e je stade definide di Fisher tant che inacetabile dal pont di viste teoric, intant che chê de determinatece e je stade scrutinade di Samuelson e Swamy (1974) che no le àn considerade par nuie desiderabile, viodût che la ipotesi di un presit che al cjapi valôr nul o infinît no jere sostignibile.

Une sistemazion organiche e forsit complete de materie e je stade fate di Eichhorn e Voeller (1976), che a àn proponût un insiemi sistematic di teoremis di indipendence e di no esistence di sotinsiemis particolârs des provis di Fisher (1922). La lôr analisi e à puartât ae dimostrazion di un «teoreme gjenerâl di no esistence» che al somee vê dât une soluzion definitive al probleme de inconsistence di insiemis particolârs di proprietâts formâls.

*4.3.3. Estensions.* Al è cualchidun che al à ritignût necessari insiorâ il sisteme di Fisher introdusint cundizions formâls gnovis che indi puartassin insom il significât e la puartade.

Chestis cundizions a son, in particolâr, lis dôs cundizions de carateristicitât, tradusude di cualchidun in chê de tipicitât, e de consistence de agregazion, che no je altri che la cetant nomenade proprietât de associativitât introdusude cuant che si à studiât lis proprietâts formâls des mediis.

E.1. Carateristicitât
Un numar indiç al sodisfe cheste cundizion cuant che il sisteme di ponderazion doprât pe sô costruzion al riflet in maniere strente e uniche la struture dai consums tai timps o tes situazions consideradis, di mût che:

$$ {}_bI_t\left(p_t, p_b; w\right) = {}_bI_t\left(p_t, p_b; q_t, q_b\right) \tag{4.73} $$

E je une cundizion introdusude di Drechsler (1973)[57], che e je stade ricognossude ad in plen, te sô impuartance e tes sôs implicazions, di Martini (1992). Al è dimostrât che cheste proprietât e je necessarie ancje se no suficiente a sigurâ che l'indiç corispondent des cuantitâts al gjoldi de proprietât de identitât. In ogni câs, al è clâr che si trate di une derivade des proprietâts de identitât (fuarte), de comensurabilitât e de omogjeneitât, proprietâts che par altri a son indipendentis la une di chê altre.

E.2. Associativitât
Un numar indiç al è associatîf cuant che al è dât di une funzion dai presits che e puarte ai stes risultâts sedi cuant che e je aplicade ai numars indiç elementârs, sedi cuant che si le calcole a tacâ di numars indiçs componûts rigjavâts de aplicazion de stesse funzion a sotinsiemis di numars indiçs elementârs. In tiermins formâls:

$$ {}_bI_t\left(p_t, p_b\right) = {}_bI_t\left({}_bI_{ti_1}, {}_bI_{ti_2}, \ldots, {}_bI_{ti_K}\right) \tag{4.74} $$

indulà che cul deponent $i$ si indiche un dai $K$ grups che si puedin formâ a tacâ di $H > K$ bens, di indulà che si calculin $K$ subindiçs tacant de stesse funzion che e je doprade par costruî l'indiç gjenerâl. In altris tiermins, il numar indiç componût si pues calcolâlu in maniere direte aplicant la funzion di agregazion ai numars indiçs elementârs che a integnin ognidun dai bens, o pûr aplicant la stesse funzion di agregazion a numars indiçs parziâi rigjavâts midiant di une funzion de stesse forme par sotinsiemis di bens.

Cheste proprietât, che e je definide ancje tant che «consistence te agregazion», e je stade proponude di Drechsler (1973) e po dopo e je stade ricjapade di Allen (1975), di Vartia (1976a) e di Martini (1992). E je une proprietât cetant impuartante, sedi dal pont di viste operatîf, sedi par chel che al inten lis sôs relazions cun altris proprietâts formâls.

Stant a un pont di viste operatîf, la impuartance di cheste proprietât e je clare, dal moment che i numars indiçs che le verifichin a permetin di passâ di numars indiçs costruîts par classis omogjeniis di bens a numars indiçs di nivel superiôr, fin a rivâ a un numar indiç che al misure il nivel gjenerâl dai presits. La adozion di une classificazion jerarchiche di bens a seconde dal lôr grât di omogjeneitât e permet di calcolâ par ogni nivel di classificazion un numar indiç componût. Po dopo, chest si pues ancjemò agregâlu al nivel superiôr, cence scugnî ripeti lis operazions di calcul a partî di une agregazion dai numars indiçs elementârs. Par esempli, al podarès zovâ costruî il numar indiç dai presits de mangjative di origjin vegjetâl e po dopo un numar indiç de mangjative di origjin animâl par dopo passâ a un numar indiç di nivel superiôr che al fâs riferiment ae mangjative tal so complès. Se l'indiç al è associatîf al baste agregâ i doi subindiçs considerantju tant che doi indiçs elementârs che ur è aplicade la funzion doprade pe lôr costruzion; in câs contrari, bisugne ripeti il calcul dal inizi, aplicant la stesse funzion a ognidun dai indiçs elementârs.

Dal pont di viste formâl cheste proprietât e je di sigûr interessante, par vie des relazions di derivazion e di implicazion che le pein a altris proprietâts. Si dimostre cun di fat che la associativitât e impliche trê proprietâts interessantis, ven a stâi la monotonicitât, la internalitât e la proporzionalitât, secont di une relazion di transitivitât, tal sens che la associativitât e impliche la monotonicitât, e cheste e impliche la internalitât e chê e impliche la proporzionalitât.

Al è just ricuardâ che pe proprietât associative al vâl un teoreme fondamentâl formulât pes mediis associativis di Nagumo (1930)[58], Kolmogorov (1930)[59] e di de Finetti (1931)[60]. Daûr di chest teoreme, un indiç associatîf al è dât de antitrasformade de medie aritmetiche de trasformade, duncje un indiç al è associatîf tal câs che:

$$ {}_bI_t = f^{-1}\left[\Sigma_h f\left(p_{th} / p_{bh}\right)\right] \tag{4.75}$$

indulà che $f$ al scuen jessi une funzion continuade monotone cressinte e $f^{1}$ al è il relatîf funzionâl inviers.

*4.4. Indiçs ideâi, vêrs, esats e superlatîfs*

*4.4.1. Premesse.* I contribûts dâts par rangjâ un sisteme di proprietâts formâls e pe ricercje di formulazions otimâls dai numars indiçs a àn puartât di une bande ae individuazion di formulis che a somein sodisfâ une buine part des proprietâts e di chê altre bande a cirî di integrâ lis diviersis metodichis intun sisteme coerent di ipotesis e di cundizions.

Il prin troi di ricercje al à menât ae definizion di numars indiçs che a son considerâts «ideâi» stant che a rispuindin a une vore di proprietâts consideradis indispensabilis par misurâ i procès di variazion di sistemis intîrs di presits.

Il sfuarç par cjatâ lis cundizions che a puedin insuazâ i diviers numars indiçs intun sisteme coerent di ipotesis di nature economiche peadis al compuartament dal consumadôr o dal produtôr al à puartât a lâ daûr di un altri troi, che al inten i indiçs cussì clamâts «vêrs» dal cost de vite o dai coscj di produzion. Par ultin, integrazions studiadis di pueste di ipotesis economichis e di recuisîts formâi a àn puartât ae definizion di indiçs clamâts «esats» e «superlatîfs».

*4.4.2. L'indiç ideâl di Fisher.* Cualchidun dai numars indiç si pues costruîlu su la fonde di cumbinazions adatis di numars indiçs sempliçs o agregatîfs za considerâts. Il plui cognossût di chescj indiçs al è il cussì clamât numar indiç «ideâl» di Fisher (1922) che al nas di une medie gjeometriche dal indiç di Laspeyres (1871) e di chel di Paasche (1874):

$$\begin{aligned} {}_bI_{tF} &= \left[{}_bI_{tL}\,{}_bI_{tP}\right]^{1/2} = \\ &= \left[\left(\Sigma_h p_{th}q_{bh} / \Sigma_h p_{bh}q_{bh}\right)\left(\Sigma_h p_{th}q_{th} / \Sigma_h p_{bh}q_{th}\right)\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{4.76}$$

Al è un numar indiç che si fonde su di un sisteme di ponderazion componût, che dut câs al à bisugne de disponibilitât des informazions su la struture dai consums tal periodi di base e cun di plui ancje in chel di riferiment. Par altri, la disponibilitât di dâts statistics no permet simpri di costruîlu.

Al fo proponût pe prime volte di Walsh (1901)[61] e la sô ipotesi, formulade par câs intune note dal so *The measurement of general exchange* *value*, e restà discognossude. Po dopo, in maniere dal dut indipendente, la formule e fo definide di Fisher (1911) tal so *Purchasing power of money*, cence però meti in lûs lis sôs proprietâts, cetant preseabilis. Il prin a metilis in evidence al fo Pigou che tal 1912[62] al pensà di indicâ l'indiç di Fisher tant che la misure plui juste par fâ des comparazions jenfri i nivei gjenerâi dai presits di doi paîs diviers metûts a confront. L'esam des carateristichis diferenziâls e des cundizions formâls sodisfatis di chest indiç al è stât disvilupât tai agns Vincj di Fisher stes e di altris autôrs che i lavoravin parsore indipendentementri un di chel altri e, stant a Fisher, cence savê un dai risultâts otignûts di chei altris. Lis proprietâts zovevulis di chest indiç, a forin esaminadis di Fisher, intun lavôr dal 1921[63], indulà che pe prime volte si fevele di indiç «ideâl». Tal stes timp, Walsh (1921)[64] al tornà a cjapâ la sô propueste metint in maniere esplicite l'indiç jenfri di chei conseabii, marcant che al jere forsit il miôr jenfri di chei che si podevin doprâ. De stesse idee a forin ancje altris autôrs, tant che Young (1921)[65] e Davies (1922)[66]. Par sierâ, Fisher, tal 1922, tal so lavôr fondamentâl *The making of index numbers*, al tratà a fonts lis carateristichis di chest indiç, dimostrant lis sôs cualitâts e peantlu in maniere definitive al so non e ae cualifiche di «ideâl».

Lis resons di cheste denominazion a stan in sostance tal numar alt di proprietâts formâls sodisfatis di chest indiç, soredut rispiet a chês ritignudis plui impuartantis te impostazion di Fisher. Dutis lis cundizions formâls dal sisteme di proprietâts, aromai cognossût, a son sodisfatis dal indiç ideâl, fale che chê de circolaritât.

Te suaze de teorie cuantitative de monede definide di Fisher (1922), grande impuartance le à la proprietât de reversibilitât dai fatôrs che no je sodisfate dai indiçs sempliçs e agregatîfs principâi. Di chês altris dôs proprietâts di reversibilitât, chê dai bens e chê dai timps, ancje la seconde e je di grande impuartance, parcè che e introdûs un vincul di coerence interne e e furnìs un procediment facil par cambiâ lis basis: cheste e je simile a chê dai fatôrs, dal moment che dutis e dôs a permetin di scambiâ i doi timps o lis dôs situazions e i presits cu lis cuantitâts, cence dâ risultâts incoerents. Cirint un indiç che al sodisfas chestis dôs cundizions di reversibilitât fondamentâls e ancje la plui part des proprietâts formâls, Fisher (1922) al rive ae conclusion che la medie gjeometriche dai doi indiçs agregatîfs fondamentâi e rapresente l'indiç plui pussibil, e duncje l'indiç «ideâl».

La uniche proprietât che no je sodisfate di chest indiç e je chê de circolaritât, aben che e sedi impuartante par meti in vore lis transizions jenfri indiçs di base diferente. Fisher al dediche un cjapitul de sô opare a dimostrâ che cheste proprietât no dome no je rilevante pes valutazions de «*performance*» di un numar indiç, ma adiriture che no je acetabile di un pont di viste teoric. In efiets, Fisher al marche che cheste proprietât par indiçs componûts si pues sodisfâle cu la medie gjeometriche semplice o ponderade o cun numars indiçs che a presentedin sistemis di ponderazion costants, li che al è evident che e risulte inacetabile par motîfs clârs.

Il sisteme di cundizions formâls di Fisher (1922) o un so cualsisei sotinsiemi nol pues puartâ, come che si à za viodût, al indiç ideâl par deduzion, stant che in ogni câs la prove di circolaritât no je compatibile cun dutis lis provis che a vanzin, e chestis, ancje se compatibilis tra di lôr, no rivin a puartâ a une funzion uniche e ugnule che lis sodisfedi tal stes moment. Si costruìs l'indiç e si lu judiche di preseâ, parcè che une volte che si à verificade la sô rispueste aes proprietâts indicadis e consideradis desiderabilis, al risulte che al sodisfe lis provis fondamentâls di reversibilitât dai timps e dai fatôrs e dutis chês altris cundizions, gjavade une, che dut câs Fisher (1922) nol considere acetabile.

Par altri, Funke e Voeller (1978), su la fonde de introduzion di une proprietât zontade riferide al sisteme di ponderazion, a son stâts bogns di dimostrâ che, fissadis trê cundizions assiomatichis, si pues rivâ al indiç ideâl. Il sisteme di assiomis che bisugne sodisfâ cuntune funzion $f$ dai presits e des cuantitâts riferîts a un timp base e al timp di riferiment (che e vedi duncje tant che argoments cuatri vetôrs di stesse dimension $H$ che a son diviers par nature e pal riferiment temporâl) al è chest:

FV.1. Reversibilitât dai timps:

$$\begin{aligned} & f(p_b, p_b; q_b, q_b) = \\ & = f(p_t, p_b; q_t, q_b)\, f(p_b, p_t; q_b, q_t) = 1 \end{aligned} \tag{4.77}$$

FV.2. Reversibilitât dai fatôrs:

$$f(p_t, p_b; q_t, q_b)\, f(q_t, q_b; p_t, p_b) = \\ = \Sigma_h p_{th} q_{th} \,/\, \Sigma_h p_{bh} q_{bh} \tag{4.78}$$

FV.3. Reversibilitât dai pês:

$$f(p_t, p_b; q_t, q_b) = f(p_t, p_b; q_b, q_t) \tag{4.79}$$

chest al significhe che un scambi des cuantitâts $q_{bh}$ e $q_{th}$, che si puedin cjapâ tant che pês aplicâts ai presits corispondents $p_{bh}$ e $p_{th}$, nol mude il valôr dal indiç. In chest câs a valin un teoreme di indipendence e un teoreme di esistence e di unicitât. Daûr dal prin teoreme, lis cundizions a son indipendentis, tal sens che e esist une funzion dai presits e des cuantitâts che e sodisfe dôs cundizions e che no sodisfe la tierce cundizion; daûr dal secont teoreme, la uniche funzion dai presits e des cuantitâts che e rispuint tal stes moment a chestis cundizions formâls e je dade dal indiç «ideâl» di Fisher (1922).

Il teoreme di Funke e Voeller (1978) si enunzie in cheste maniere: une funzion $f$: $R_{++}{}^{4n} \rightarrow R_{++}$ e sodisfe lis cundizions di reversibilitât dai timps, dai fatôrs e dai pês se e dome se e je dade dal indiç «ideâl» di Fisher, e duncje:

$$f(p_t, p_b; q_t, q_b) = \\ = \left[\left(\Sigma_h p_{th} q_{bh} \,/\, \Sigma_h p_{bh} q_{bh}\right)\left(\Sigma_h p_{th} q_{th} \,/\, \Sigma_h p_{bh} q_{th}\right)\right]^{1/2} \tag{4.80}$$

Il teoreme si dimostrilu viodint che pe cundizion di reversibilitât dai fatôrs si à:

i) $$f(p_t, p_b; q_t, q_b)\, f(q_t, q_b; p_t, p_b) = \Sigma_h\, p_{th} q_{th} \,/\, \Sigma_h\, p_{bh} q_{bh}$$

Scambiant in cheste funzion $p_{th}$ cun $p_{bh}$ la ecuazion e divente:

ii) $$f(p_b, p_t; q_t, q_b)\, f(q_t, q_b; p_b, p_t) = \Sigma_h\, p_{bh} q_{th} \,/\, \Sigma_h\, p_{th} q_{bh}$$

Aplicant la proprietât de reversibilitât dai pês a ducj i doi i fatôrs si à:

iii) $$f\left(p_b, p_t; q_b, q_t\right) f\left(q_t, q_b; p_t, p_b\right) = \Sigma_h\ p_{bh} q_{th} / \Sigma_h\ p_{th} q_{bh}$$

Dividint la i) par cheste ultime ecuazion si à:

iv) $$\begin{gathered} f\left(p_t, p_b; q_t, q_b\right)\ f\left(q_t, q_b; p_t, p_b\right) / \\ / f\left(p_b, p_t; q_b, q_t\right)\ f\left(q_t, q_b; p_t, p_b\right) = \\ = \left(\Sigma_h\ p_{th} q_{th} / \Sigma_h\ p_{bh} q_{bh}\right) / \left(\Sigma_h\ p_{bh} q_{th} / \Sigma_h\ p_{th} q_{bh}\right) \end{gathered}$$

che, dopo di semplificazions oportunis, si ridûs a:

v) $$\begin{gathered} f\left(p_t, p_b; q_t, q_b\right) / f\left(p_b, p_t; q_b, q_t\right) = \\ = \left(\Sigma_h p_{th} q_{th} / \Sigma_h p_{bh} q_{bh}\right)\left(\Sigma_h p_{th} q_{bh} / \Sigma_h p_{bh} q_{th}\right) \end{gathered}$$

Moltiplicant cheste ecuazion pe (4.77), che e salte fûr de aplicazion de reversibilitât dai timps, si à:

vi) $$\begin{gathered} \left[\ f\left(p_t, p_b; q_t, q_b\right) / f\left(p_b, p_t; q_b, q_t\right)\ \right] \\ \left[\ f\left(p_t, p_b; q_t, q_b\right)\ f\left(p_b, p_t; q_b, q_t\right)\ \right] \\ = \left(\Sigma_h\ p_{th} q_{th} / \Sigma_h\ p_{bh} q_{bh}\right)\ \left(\Sigma_h\ p_{th} q_{bh} / \Sigma_h\ p_{bh} q_{th}\right) \end{gathered}$$

di indulà che si à:

vii) $$\begin{gathered} \left[f\left(p_t, p_b; q_t, q_b\right)\right]^2 = \\ = \left(\Sigma_h p_{th} q_{th} / \Sigma_h p_{bh} q_{bh}\right)\left(\Sigma_h p_{th} q_{bh} / \Sigma_h p_{bh} q_{th}\right) \end{gathered}$$

Par ultin, considerant dome la lidrîs positive, si rigjave l'indiç «ideâl»:

$$\begin{gathered} f\left(p_t, p_b; q_t, q_b\right) = \\ = \left[\left(\Sigma_h p_{th} q_{th} / \Sigma_h p_{bh} q_{bh}\right)\left(\Sigma_h p_{th} q_{bh} / \Sigma_h p_{bh} q_{th}\right)\right]^{1/2} = {}_b I_{tF} \end{gathered} \tag{4.81}$$

In cheste maniere, cu la introduzion di une gnove cundizion che e rivuarde la reversibilitât dai pês dâts des cuantitâts, si pues rigjavâ il sôl numar indiç che al sodisfe un insiemi prefissât di cundizions.

*4.4.3. I numars indiçs vêrs.* Il numar indiç fondât su la teorie economiche dal compuartament dal consumadôr e dal produtôr al è stât dispès definît tant che un numar indiç «vêr», stant che al è adat par misurâ lis variazions reâls dal cost de vite o de produzion. Al è dut câs un strument teoric di misurazion des variazion relativis de capacitât di acuist de monede, parcè che, come che si à viodût, al dipent di un procediment di massimizazion de utilitât cuntune forme funzionâl che e pues jessi di nature divierse e in ogni câs dificile di identificâ e di misurâ in maniere empiriche.

Konüs stes (1924) al à provât, come che si à viodût, a proponi une strade pe costruzion di un numar indiç adat a misurâ lis variazions dai presits, di mût di sigurâ la invariance dai nivei di sodisfazion che si puedin rigjavâ di un cos ben definît di bens, doprant indiçs agregatîfs dal tip di Laspeyres (1871) e di Paasche (1874), ancje se al saveve che dutis e dôs lis stradis no podevin puartâ che a une aprossimazion dal indiç «vêr».

A chestis propuestis si son zontâts altris contribûts che a àn fat nassi un altri aprofondiment dal probleme de costruzion dal numar indiç «vêr», fondât su basis saldis di nature teoriche. Si fâs riferiment in particolâr ai lavôrs di Wald (1939)[67], di Frisch (1936), di Stuvel (1957)[68], e par ultin de metodiche «fatoriâl» di Banerjee (1961, 1977)[69].

Wald (1939) al da une impostazion che e introdûs te costruzion dai numars indiçs di tip economic lis funzions dal consum di Engel, che lis lôr formis a àn di jessi cognossudis in riferiment al an base $b$ e a chel di riferiment $t$, indicadis rispetivementri une cun $C^{(b)}$ e chê altre cun $C^{(t)}$. Daûr di cheste impostazion, il numar indiç al è dât dal rapuart jenfri lis dôs spesis ecuivalentis, dadis di $S_b$ e di $S_t$, tal sens che $S_t$ al è compagn di $S_b$ cuant che al rapresente la spese plui basse che e permet di comprâ ai presits in vore tal timp di riferiment $t$ un insiemi di bens che al sta su la stesse estension di indiference li che si cjate l'insiemi di bens comprâts cu la spese $S_t$ ai presits in vore tal periodi $b$.

Il numar indiç proponût di Wald (1939)[70] si presente sot di cheste forme:

$$
\begin{aligned}
{}_bI_{tWd} = &\left\{\Sigma_h p_{th}\left[q_{bh} + q_{th}(\mu/\lambda)^{1/2}\right]\right\}/ \\
&/\left\{\Sigma_h p_{bh}\left[q_{bh} + q_{th}(\mu/\lambda)^{1/2}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{4.82}
$$

indulà che cun λ si intint il rapuart jenfri lis utilitâts margjinâls de monede[71] $\omega_t$ e $\omega_b$:

$$\omega_t/\omega_b = \Sigma_h p_{bh}\left(q^*_{bh} - q_{bh}\right)/\Sigma_h p_{th}\left(q^*_{bh} - q_{bh}\right) = \lambda \tag{4.83}$$

jessint $q_{bh}$ e $q^*_{bh}$ doi ponts su la curve $C^{(b)}$, di mût che:

$$\Sigma_h p_{th}\left(q^*_{bh} - q_{bh}\right) = 0 \tag{4.84}$$

cun di plui, $q_{th}$ e $q^*_{th}$ a rapresentin doi ponts de curve $C^{(t)}$ pai cuâi[72]:

$$\Sigma_h p_{bh}\left(q_{th} - q_{bh}\right) = \Sigma_h p_{th}\left(q^*_{th} - q_{bh}\right) = 0 \tag{4.85}$$

intant che cun μ si intint il rapuart jenfri lis dôs utilitâts margjinâls de monede:

$$\omega^*_t/\omega_b = \Sigma_h p_{bh}\left(q^*_{th} - q_{th}\right)/\Sigma_h p_{th}\left(q^*_{th} - q_{th}\right) = \mu \tag{4.86}$$

Po dopo, si costruìs l'indiç in maniere empiriche, midiant di une stime dai parametris des funzions di Engel riferidis a ognidun dai bens.

La metodiche di Frisch (1936)[73] de cussì clamade «spese dople» e finìs par puartâ a risultâts analics a chei di Wald (1939). Al partìs de considerazion des cuantitâts $q_{bh}$ e $q_{th}$ che a stan une su la curve di Engel riferide al an base e chê altre su la curve di Engel che si riferìs al an di riferiment e al costruìs cheste ecuazion:

$$\Sigma_h\, p_{th}q_{th}\ \Sigma_h\, p_{bh}q_{th} = \Sigma_h\, p_{th}q_{bh}\ \Sigma_h\, p_{bh}q_{bh} \tag{4.87}$$

indulà che al membri di çampe si considere la spese sostignude par comprâ la cuantitât al timp $t$ e a presits che si riferissin al timp di riferiment e a chel di base, intant che su la diestre si considere la spese che e rivuarde la cuantitât al timp di base che si dopre pe valutazion dople. Se si considere buine la linearitât des dôs funzions di Engel, cun cualchi passaç si rive al numar indiç proponût di Frisch (1936), in cheste forme:

$$I_{tFr} = \left[ -a_{tb} + \left( a_{tb}{}^{2} + 4\ b_{tb}\ b_{bt}\ S_{b}{}^{2} + \right.\right. \\ \left.\left. +4\ b_{tb}\ a_{bt}\ S_{b} \right) \right]^{1/2} / \, 2b_{tb}\ S_{b} \tag{4.88}$$

indulà che cun $S_b$ si indiche la spese al timp base cuntun riferiment temporâl che al vâl sedi pes cuantitâts sedi pai presits, intant che $b_{rk}$ a son grandecis che a nassin de sume di prodots dai coeficients di regression des funzions di Engel, cjapant par buine la lôr linearitât, pai lôr presits relatîfs, e duncje $b_{rk} = \Sigma_h \beta_{rh} p_{kh}$ e $a_{rk}$ a son grandecis che a nassin dal prodot des intercetis pai presits dai bens che a chei si riferissin lis funzions, e duncje $a_{rk} = \Sigma_h \alpha_{rh} p_{kh}$. Al è evident duncje che $b_{tt} = b_{bb} = 1$, intant che $a_{tt} = a_{bb} = 0$.

Tant che pont di passaç a di une impostazion di tip fatoriâl, e vâl la pene di cjapâ in considerazion la metodiche di Stuvel (1957) che al propon un indiç sintetic fondât su di une logjiche diferente di chê seguide par solit. Invezit di costruî un numar indiç su la fonde di un rapuart jenfri doi agregâts di valôr, e je proponude une analisi dal increment che l'agregât al subìs passant dal periodi base a chel di riferiment, che al è di atribuî sedi a variazions des cuantitâts, sedi a chês dai presits. Par chest, al puest di un procediment fondât su di un rapuart di agregâts, si à miôr cjapâ come pont di partence la diference jenfri i doi agregâts di spese, che e je dividude in dôs o plui componentis aditivis di variazion: la prime componente si riferìs ae misure dal contribût des variazions des cuantitâts, la seconde, invezit, aes variazions leadis ae evoluzion dai presits. Al salte fûr un numar indiç dai presits (ma la stesse robe e vâl pal indiç des cuantitâts) che si esprim in funzion dai numars indiçs dai presits e des cuantitâts di Laspeyres (1871) e dal rapuart jenfri i doi agregâts rilevâts tal periodi di riferiment in chel dal periodi di base, e che cun di plui al gjolt des proprietâts che Fisher

(1922) al stime di grande impuartance, ven a stâi la reversibilitât rispiet ai timps e rispiet ai fatôrs che, cemût che si sa, no son sodisfatis dai indiçs di Laspeyres (1871) e di Paasche (1874). Chest indiç al cjape chestis formis rispetivementri pal indiç dai presits e par chel des cuantitâts:

$$
\begin{aligned}
{}_bI_{tS(p)} &= \left( {}_bI_{tL(p)} - {}_bI_{tL(q)} \right)/2 + \\
&+ \left\{ \left[ \left( {}_bI_{tL(p)} - {}_bI_{tL(q)} \right)/2 \right]^2 + S_t / S_b \right\}^{1/2}
\end{aligned}
\tag{4.89}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_bI_{tS(q)} &= \left( {}_bI_{tL(q)} - {}_bI_{tL(p)} \right)/2 + \\
&+ \left\{ \left[ \left( {}_bI_{tL(q)} - {}_bI_{tL(p)} \right)/2 \right]^2 + S_t / S_b \right\}^{1/2}
\end{aligned}
\tag{4.90}
$$

La metodiche di Stuvel (1957) e rapresente il pont di partence par une altre impostazion che, midiant di chê, si cîr une formulazion dal indiç «vêr» dal cost de vite, ven a stâi chel «fatoriâl» di Banerjee (1977), che al dopre un scheme concetuâl propri dal dissen dai esperiments par disvilupâ une analisi di decomposizion des variazions dai agregâts. In cheste impostazion si cjape in esam la variabil dade dal valôr in tiermins di doi «fatôrs», dâts rispetivementri dai presits e des cuantitâts e di doi «nivei», dâts dai doi riferiments temporâi *b* e *t*. Midiant la scomposizion de variabilitât totâl in tiermins di fatôrs e di interazion jenfri i doi fatôrs si rive al indiç di Banerjee (1977) che al cjape cheste forme, te ipotesi di linearitât des funzions di Engel:

$$
\begin{aligned}
{}_bI_{tB} &= \left(1 + b_{bt}\right) / \left(1 + b_{tb}\right) + \\
&+ S_{bb}^{-1} \left(a_{bt} - a_{ab}\right) / \left(1 + b_{tb}\right)
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

indulà che cun *a* e *b* si intindin lis grandecis che a cjapin dentri i parametris des funzions di consum di Engel za consideradis par chês altris formulazions dal indiç «vêr». E je une formulazion vincolade ae ipotesi di linearitât des funzions dal consum. Banerjee al da une formulazion plui gjenerâl, no peade a chest vincul funzionâl.

*4.4.4. I numars indiçs esats e superlatîfs*. Une metodiche che e met adun lis diviersis impostazion e je chê che e puarte a une interpretazion economiche di ognidun dai indiçs costruîts su la fonde dal troi distributîf e di chel agregatîf e che si tradûs te costruzion di numars indiçs «esats» e «superlatîfs», come che al à proponût Diewert (1976)[74].

Daûr di cheste impostazion, un numar indiç si dîs «esat» se, cualsisei e sedi la maniere che al è stât costruît, al è compagn di un numar indiç di tip funzionâl che al sodisfe ae cundizion de invariance dal nivel di sodisfazion corispondent a une particolâr funzion di utilitât[75].

Si è di fat za viodût che ancje i indiç sintetics plui sempliçs rigjavâts midiant di une metodiche distributive o midiant di metodis agregatîfs a puedin jessi rigjavâts costruint un sisteme di pês che al nas di un procediment di minimizazion de spese sot dal vincul de invariance de utilitât, esprimude tant che funzion des cuantitâts (o pûr, in tiermins alternatîfs, pal câs dai impleis intermedis, de funzion di produzion).

Une buine part dai indiçs fin cumò considerâts[76] e je duncje un indiç «esat».

L'indiç dât dal rapuart jenfri dôs mediis aritmetichis dai presits, e duncje l'indiç di Dutot (1738)[77] dât di :

$$_{b}I_{tD} = \Sigma\, p_{th} \,/\, \Sigma\, p_{bh} \tag{4.92}$$

Al è esat, parcè che si rigjavilu cjapant une funzion di utilitât dal tip[78]:

$$U(q) = U(q_1, q_2, \ldots, q_h, \ldots, q_H) = \max b_h - \max(b_h - q_h)$$

L'indiç che si calcule midiant di une medie gjeometriche di indiçs elementârs, che si scrîf in cheste maniere:

$$_{b}I_{tj} = \left\{\Pi_h \left(p_{th} \,/\, p_{bh}\right)^{w_h}\right\}^{1/\Sigma\, w_h} \tag{4.93}$$

al risulte esat in relazion a une funzion di utilitât de forme:

$$U(q) = U(q_1, q_2, \ldots, q_h, \ldots, q_H) = \Pi\; q_h^{\,w_h}$$

I indiçs di Laspeyres (1871) e di Paasche (1874) a son estas sedi in riferiment a di une funzion di utilitât lineâr:

$$U(q) = U(q_1, q_2, \ldots, q_h, \ldots, q_H) = \Sigma_h \; \mathrm{w}_h \; q_h,$$

sedi in riferiment a di une funzion di utilitât di Leontief (1941)[79], dal tip:

$$U(q_1, q_2, \ldots, q_h, \ldots, q_H) = \Sigma_h \; q_h \,/\, c_h$$

A son dôs funzions di utilitât diviersis, la prime di chestis e impliche la sostituibilitât totâl dai bens, intant che la seconde le esclût.

Par ultin, l'indiç ideâl di Fisher (1922) al è ancje chel esat cun riferiment a une funzion di utilitât cuadratiche cuntun ciert sisteme di pês e ancje in riferiment a une funzion lineâr.

Daûr de impostazion di Diewert (1976)[80], un indiç esat si pues dî ancje «superlatîf», se la funzion di utilitât che le subordene e à une struture che e rint pussibile une aprossimazion dal secont ordin a une funzion lineâr omogjenie, in altris tiermins, se si verifiche la identitât des derivadis secondis[81].

Jenfri i indiçs superlatîfs, bisugne citâ prin di dut chel di Fisher (1922) che ancje par cheste strade al viôt confermadis lis sôs proprietâts desiderabilis[82], che però no si slargjin ancje ae transitivitât e ae consistence te agregazion.

Une altre famee di indiçs che si dimostre jessi superlatîfs rispiet a di une funzion di utilitât o di cost di tip logaritmic trascendentâl e je chê di Törnqvist (1936).

La impuartance di cjatâ dai numars indiçs che si puedin definî superlatîfs e sta soredut tal grât di coerence che chescj a mostrin daûr di ipotesis adatis che a integnin lis funzions di compuartament dai consumadôrs o dai produtôrs e te intercambiabilitât sostanziâl che a mostrin ae lûs dai compuartaments che si verifichin par variazions limitadis dai presits jenfri i doi periodis considerâts: si dimostre di fat che doi numars indiçs superlatîfs a puartin a risultâts in pratiche compagns par variazions no sensibilis, fat che al rint mancul delicât il probleme de sielte jenfri doi indiçs alternatîfs tal câs che no si vedi a disposizion evidencis empirichis adeguadis par verificâ la forme des funzions di compuartament (in tiermin di utilitât o di coscj) dai consumadôrs o dai produtôrs.

[1] Riferiment a L. March, Les indices économiques, in «Metron», vol. III, n. 2, 1923, pp. 334-362.
[2] Cfr. I. Fisher, *The making of index numbers*, Houghton Mifflin, Boston, 1922.
[3] R. Rondini, *Significato e validità della ripartizione del reddito nazionale italiano secondo province e regioni*, in «Bancaria», Roma, 1958, pp. 534-541.
[4] Il confront in tiermins reâi de ricjece in timps e lûcs diferents si lu à vût a tacâ des fondis de statistiche economiche. Lis primis provis documentadis tal costruî numars indiçs dai presits si lis à dal 1707, an che al ven stampât il *Cronicum preciosum*, la opare dal vescul Fleetwood, li che, par altri, e je criticade une norme dal Statût di un coleç di Oxford, fate buine 300 agns indaûr e che e previodeve la impussibilitât di zovâsi di une borse di studi par cui che al veve a disposizion une rendite di almancul 5 sterlinis par an. Fleetwood al rive a dimostrâ, cence par altri proponi un indiç dai presits, cemût che cheste cifre e vedi pierdût tal timp une buine part dal so significât origjinari, stant che lis 5 sterlinis di trê secui prime a stavin par un ciert podê di acuist che tal lâ dai agns al jere lât sbassantsi di cussì tant, che no vignivin plui dadis borsis di studi, ancje se a jerin ancjemò des diferencis di redit jenfri i students.
[5] Par une tratazion detaiade de metodiche distributive, si fasi riferiment par esempli: R. Frisch, *Annual survey of general economic theory: the problem of index numbers*, in «Econometrica», vol. IV, n. 1, 1936, pp. 1-38 e A. Uggè, *I numeri indici dei prezzi*, Giuffrè, Milano, 1946.
[6] Cfr. W.C. Mitchell, *The making and using of index numbers*, in «U.S. Bureau of Labor Statistics», Bullettin n. 284, Washington, 1921.
[7] Cfr. M. Olivier, *Les nombres indices de la variation des prix*, Giard, Paris, 1927.
[8] Cfr. D. Tenderini, *Il significato teorico e pratico degli indici dei prezzi*, in «Rivista Italiana di Statistica, Economia e Finanza», anno VI, 1934, pp. 269-331, 426-506, 734-772.
[9] Cfr. M. Saibante, *Contributo alle ricerche sulla dispersione delle variazioni dei prezzi, loro significato*, in «Atti della IX Riunione della Società Italiana di Statistica», 1950, pp. 281-296.
[10] Cfr. L. Faleschini, *Sulla forma delle distribuzioni dei prezzi relativi*, in «L'industria», n. 1, 1956, pp. 3-12.
[11] Cfr. A. Mastrodonato, *La distribuzione dei prezzi relativi in Italia dal 1966 al 1970*, in «Rivista Italiana di Economia, Demografia e Statistica», vol. XXVII, ottobre-dicembre 1973, pp.149-182
[12] Te opare *Delle Monete e della istituzione delle zecche in Italia*, Carli al intint misurâ la variazion dai presits dal forment, dal vin e dal vueli sucedude in Italie dopo de scuvierte de Americhe, tal periodi cjapât dentri jenfri il 1450 e il 1500, doprant une sintesi par medie aritmetiche: prime marcjanzie par marcjanzie, dopo jenfri i rapuarts medis relatîfs aes trê marcjanziis.
[13] Il numar indiç proponût di Jevons al nas de aplicazion des tesis su la monede ae misure des variazions dal presit dal aur parcè che «… ogni variazion di presit dal aur e influìs su ducj i presits te stesse maniere proporzionâl e se chês altris causis di perturbazion si puedin considerâ proporzionâls ae entitât de variazion che a causionin tal presit di une o plui marcjanziis, inalore dutis lis singulis variazions dai presits si compensin la une cun chê altre te medie gjeometriche, metint in lûs la vere variazion che al à vût il presit dal aur…». Cfr. W.S. Jevons, *A serious fall in the value of gold ascertained and its social effects* e *The variation of prices and the value of the currency since 1782*, ducj i doi dentri di *Investigation in currency and finance*, Mac Millan, London, 1884.
[14] L. Faleschini, *Sui miscugli di distribuzioni gaussiane*, in «Rivista Italiana di Economia, Demografia e Statistica», vol. V, n. 1-2, 1951, pp. 30-47.
[15] Cfr. H. Paasche, *Über die Preisentwicklung der letzten Jahre, nach den Hamburger Börsenentwicklungen*, in «Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik», n. 23, 1874, pp. 168-178.

[16] Cfr. E. Laspeyres, *Die Berechnung einer mittleren Warenpressteigerung*, in «Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik», n. 16, 1871, pp. 296-871.
[17] Cemût che si sa, se e esist une corelazion lineâr positive jenfri i indiçs elementârs dai presits e des cuantitâts, l'indiç di Paasche al puarte a valôrs simpri sore di chei rigjavabii cul criteri di Laspeyres; une corelazion negative jenfri i indiçs elementârs, invezit, e puarte a une relazion di ordin inviers jenfri i doi criteris. Dome tal câs che la variazion relative des cuantitâts e sedi indiferente ae variazion relative ai presits, ipotesi par altri par nuie realistiche tal cjamp economic, i doi sistemis di agregazion a risultin indiferents. Si viodi, par esempli: L.W. von Bortkiewicz, *Zweck und Struktur einer Preisindexzahl*, in «Nordisck Statistiks Tidskrift», 1923, pp. 395 e seguitivis.
[18] Cfr. J. Lowe, *The present state of England*, London 1822
[19] Cfr. F.Y. Edgeworth, *The plurality of index numbers*, in «Economic Journal», n. 35, 1925, pp. 379-388.
[20] Cfr. A. Marshall, *Money, credit and commerce,* London, 1923.
[21] Cfr. A.L. Bowley, *Notes on index numbers*, in «The Economic Journal», vol. XXXVIII, n. 159, June 1928, pp. 216-237.
[22] Cfr. F. Divisia, *L'indice monétaire et la théorie de la monnaie*, in «Revue d'économie politique», n. 39, julliet-aoùt 1925, pp. 842-861; septembre-octobre 1925, pp. 980-1008; novembre-decembre 1925, pp. 1121-1151; n. 40, janvier-fevrier 1926, pp. 49-81.
[23] Cfr. L. Törnqvist, *The consumption price index of the bank of Finland*, in «Bank of Finland Monthly Bullettin», n. 10, 1936, pp. 1-8, n. 11, 1937, pp. 73-95.
[24] Cfr. Y.O. Vartia, *Ideal log-change index numbers*, in «Scadinavian Journal of Statistics», vol. III, 1976, pp. 121-126 e Y.O. Vartia, *Relative changes and index numbers*, The Research Institute of the Finnish Economy, Helsinki, 1976.
[25] Cfr. K. Sato, *The ideal log-change index numbers*, in «The Review of Economics and Statistics», vol. LVIII, n. 2, 1976, pp. 223-228 e K. SATO, *The meaning and measurement of the real value added index*, in «The Review of Economics and Statistics», vol. LVIII, n. 4, 1976, pp. 434-442.
[26] Cfr. H. Theil, *Best linear index numbers of prices and quantities*, in «Econometrica», vol. XXVIII, n. 2, 1960, pp. 464-480.
[27] Cemût che si sa, l'indiç di Divisia, restât in pratiche discognossût fin al articul di Frisch dal 1936, al à influençât i indiçs uficiâi dai presits tacant cul 1962 te Grande Bretagne e dal 1971 in France doprant pês variabii di an in an. Si viodi par esempli: F.G. Forsyth, R.F. Fowler, *The theory and practice of chain price index numbers*, in «Journal of Royal Statistical Society», series A, vol. CXLIV, 1981, pp. 224-246.
[28] Un dai vantaçs dai indiçs a cjadene, rispiet ai indiçs tradizionâi che si fondin su un cos fis, al ven dal fat che la sielte de formule e devente mancul impuartante parcè che se lis concatenazions a son costruidis a intervai curts, la sielte de ipotesi sul compuartament dai presits e des cuantitâts che a stan ae fonde de formule di colegament e influence di pôc e nuie il risultât finâl. Cfr. F.G. Forsyth, R.F. Fowler (1981), op. cit.
[29] R. Roy, *Les nombres indices*, in «Journal de la Societé de Statistique de Paris», janvier-février, 1949, pp. 15-34.
[30] Si viodi: R.G.D. Allen, *Price index numbers*, in «Review of the International Statistical Institute», vol. XXXI, n. 3, 1963, pp. 281-306 e R.G.D. Allen, *Index numbers in theory and practice*, Mac Millan, New York, 1975.
[31] C. Walsh, *The measurement of general exchange value*, Macmillan, New York, 1901.
[32] Si sa ben che Vartia, tal so lavôr dal 1976, cun di plui di vê proponût un so indiç, al à costruît une gnove medie gjeometriche ponderade cul contribût des conclusions che al à dât Sato (1976b). Cfr. Y.O. Vartia (1976), op. cit., pp. 121-126.
[33] Cfr. H. Theil (1960), op. cit.
[34] Si viodi: T. Kloek, G.M. De Wit, *Best linear and best linear unbiased index numbers*, in «Econometrica», vol. XXIX, n. 4, 1961, pp. 602-616.
[35] M. Faliva, *Indici dei prezzi periodali,* in «Rivista Internazionale di Scienze Sociali», 1973, pp. 37-46.
[36] C. Quintano, *Gli indici dei prezzi (o di quantum) di tipo aggregativo e gli indici sintetici basati su modelli regressivi*, in «Studi Economici», n. 2, Angeli, Milano, 1974, pp. 109-123.
[37] La metodiche funzionâl e je stade descrivude in maniere organiche pe prime volte di Frisch (1936) che al à definît i indiçs de metodiche distributive e agregative cence significât economic, stant che si fondin su ipotesis che a puedin jessi fatis buinis de teorie economiche dome intun periodi curt, parcè che i sogjets economics a reagjissin a ogni variazion dai presits mudant la composizion dai lôr consums e *vice versa*.

[38] Za cui prins contribûts di Konüs, la metodiche funzionâl e à fat riferiment ai assiomis di compuartament dal consumadôr che si puedin ricondusi ae teorie ordenâl paretiane, indulà che un consumadôr si dîs razionâl se al agjìs in rispiet a chescj assiomis: transitivitât, sielte, continuitât, no sazietât e diferenziabilitât. Si viodi par esempli: H. Wold, *Demand analisys*, Wiley, New York, 1953 e P. Samuelson, *Fondamenti di analisi economica,* Il Saggiatore, Milano, 1973.

[39] Tai stes agns che Fisher (1922) al cjate un scheme metodologjic li che la sielte jenfri lis diviersis tecnichis di misurazion dai presits e pues jessi fate dome su basis logjichis e formâls e cence riferiment ae teorie economiche, Konüs al propon un scheme concetuâl contrari ma parimentri gjenerâl, introdusint i indiçs a utilitât costante intun saç dal 1924, che al è stât publicât par intîr in Ocident dome tal 1939. Cfr. A.A. Konüs, *The problem of the true index of the cost of living*, in «Econometrica», vol. VII, 1939, pp. 10-29.

[40] Si sa ben che i indiçs proponûts di Konüs, aben che origjinâi di un pont di viste logjic e formâl, a fasin riferiment a cualchi intuizion preseabile di C. Gini sul podê di acuist de monede in sens fisic e economic, cemût che Konûs stes al à ametût. Cfr. C. Gini, *Quelques considérations au sujet de la constrution des nombres indices des prix et des questions analogues*, in «Metron», vol. IV, n. 1, 1924, pp. 3-162 e C. Benedetti, *Scambio di idee sui numeri indice e sulla probabilità con A.A. Konüs*, in «Metron», vol. XLII, n. 1-2, 1984, pp. 445-495.

[41] L'indiç di Konüs-Laspeyres al marche di trop che si à di moltiplicâ il redit disponibil al timp base par che il consumadôr al puedi vê un redit che i permeti di rivâ al timp di riferiment cu la stesse utilitât dal timp base cu la minime spese; Konüs stes al dimostre che il «vêr» indiç dal cost de vite si cjatilu dentri di un interval delimitât dai indiç di Konüs-Paasche e Konüs-Laspeyres. Si viodi par esempli: C. Benedetti, *Teorie e tecniche dei numeri indici*, in «Metron», vol. XXII, n. 1-2, 1962, pp. 55-62.

[42] P.A. Samuelson, S. Swamy, *Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis*, in «The American Economic Review», vol. LXIV, n. 4, 1974, pp. 566-593.

[43] L.R. Christensen, D.W. Jorgenson, L.J. Lau, *Conjugate duality and the trascendental logarithmic production function*, in «Econometrica», n. 3, 1971, pp. 255-256.

[44] Par lâ insot ae forme e ae aplicazion de funzion di utilitât di Geary e Stone si viodi par esempli: W.E. Diewert, *The economic theory of index numbers: a survey*, in A. Deaton, *Essays in the theory and measurement of consumer behavior*, Cambridge University Press, London, 1981, pp. 163-208.

[45] Cemût che o savìn, a son stâts proponûts ancje tentatîfs di costruî dai numars indiçs dal cost de vite cence fâ riferiment a une funzion di sodisfazion particolâr, par evitâ l'arbitri che al ven di cheste sielte, dant al stes timp risultâts di aplicâ a soluzions reâls efetivis. Benedetti par esempli, doprant i assiomis de teorie paretiane al costruìs un indiç dal cost de vite minimizant la distance Euclidee: $d(q,b) = \sum_h [(b_h - q_h)^2]^{1/2}$, indulà che $b$ al rapresente il vetôr des cuantitâts che a saressin ideâls pal consumadôr ma che no ur rive par colpe dal vincul di belanç. Si viodi par esempli: C. Benedetti, *Un modo di eludere la scelta a priori della funzione di soddisfazione nella costruzione di un indice del costo della vita purtuttavia basato su criteri ottimali*, in «Metron», vol. XXIV, n. 1-4, 1965, pp. 415-432.

[46] R. Pfouts, *An axiomatic approach to index numbers*, in «Review of the International Statistical Institute», vol. XXXIV, n. 2, 1966.

[47] W. Eichhorn, J. Voeller, *Theory of the price index*, Springer, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1976.

[48] W. Eicchorn, R. Henn. O. Opitz, R.W. Shephard, *Theory and applications of economic indices*, Phisica, Würzburg, 1978.

[49] Il contribût di Martini, in plui di ufrî une analisi puntuâl e complete des proprietâts assiomatichis, derivadis e desideradis dai numars indiçs, al da ancje une clâf di leture unitarie par superâ lis metodichis che a jerin stadis proponudis, stant che al definìs *ex ante* lis proprietâts essenziâls che a àn di jessi sodisfatis di un numar indiç par che si puedi definîlu cussì. Tal stes lavôrs e je proponude une formule gjenerâl dai indiçs bilaterâi dai presits, $P(x, y)$, che e je costruide in funzion dai presits, des cuantitâts e dai doi parametris $x$ e $y$ cjapâts dentri jenfri 0 e 1. L'Autôr al à ancje provât che al cambiâ di $x$ e $y$ si definissin i unics indiçs bilaterâi che, cui cofatôrs rispetîfs, a sodisfin la proprietât de comensurabilitât, de omogjeneitât di prin grât, de identitât e de associativitât. Cfr. M. Martini, *I numeri indice in un approccio assiomatico,* Giuffrè, Milano, 1992.

[50] Si viodi par esempli: W. Eichhorn, *Fisher's tests revisited*, in «Econometrica», n. 44, 1976, pp. 247-256.

[51] Cfr. I. Fisher, *The purchasing power of money*, Mac Millan, New York, 1911.

[52] Cfr. G. Haberler, *Der Sinn der Indexzahlen. Eine Untersuchunsg über den Begriff des Preisniveaus und die Methoden seiner Messung*, Tübingen, 1927.
[53] Cfr. A. Wald, *Zür Theorie der Preisindexziffern*, in «Zeitschrift für Nationalökonomie», n. 8, 1937, pp. 179-219.
[54] Cfr. S. Swamy, *Consistency of Fisher's tests*, in «Econometrica», vol. XXXIII, n. 3, 1965, pp. 619-623.
[55] Cfr. P.A. Samuelson, S. Swamy (1974), op. cit.
[56] In plui dal lavôr fondamentâl e za citât dal 1936, al va ricuardât che bielzà tal 1930 Frisch al veve frontât il probleme de inconsistence dai test di Fisher. Cfr. R. Frisch, *Necessary and sufficient conditions regarding the form of an index number which shall meet certain of Fisher's test*, in «Journal of the American Statistical Association», vol. XXV, December 1930, n. 25, pp. 397-406.
[57] Cfr. L. Drechsler, *Weighting of index numbers in multilateral international comparisons*, in «The Review of Income and Wealth», series 19, n. 1, 1973, pp. 17-34.
[58] Cfr. M. Nagumo, Nota in «Japanese Journal of Mathematics», vol. VI, n. 1, 1930, p. 71.
[59] Cfr. A. Kolmogorov, *Sur la notion de moyenne*, in «Rendiconti dei Lincei», 2° semestri, fassicul 9, 1930.
[60] Cemût che si sa, il contribût di de Finetti al è stât influençât des osservazions di Chisini su la definizion di medie. Cfr. O. Chisini, *Sul concetto di media*, in «Periodico di Matematiche», vol. II, 1928, pp. 106-116.
[61] Cfr. C. Walsh (1901), op. cit.
[62] A.C. Pigou, *Wealth and welfare*, Macmillan, London, 1912.
[63] I. Fisher, *The best form of index number*, in «Quarterly Publications of the American Statistical Association», March 1921, pp. 533-551.
[64] C. Walsh, *The problem of estimation*, P.S. King and Son, London, 1921.
[65] A. Young, *The measurement of changes of the general price level*, in «The Quarterly Journal of Economics», Volume 35, Issue 4, 1 August 1921, p. 572.
[66] G.R. Davies, *Introduction to economic statistics*, The century Co., New York, 1922.
[67] A. Wald, *A new formula for the index of cost of living*, in «Econometrica», vol. VII, n. 4, 1939, pp. 319-331.
[68] G. Stuvel, *A new index number formula*, in «Econometrica», vol. XXV, n. 1, 1957, pp. 123-131.
[69] K.S. Banerjee, *A factorial approach to construction of true cost of living index and its application in studies of changing in national income*, in «Sankhya», vol. XXIII, 1961, pp. 297-304 e K.S. Banerjee, *On the factorial approach providing the true index of cost of living*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1977.
[70] Wald al dimostre che l'indiç «vêr» dal cost de vite si cjatilu dentri di un tetraedri individuât des cubiis di ponts $q_{bh}\, q^*_{bh}$ e $q_{th}\, q^*_{th}$ che si cjatin su lis curvis di Engel $C^{(b)}$ e $C^{(t)}$ e individuâts de intersezion cu lis retis di belanç dal timp base e di feriment. Une tratazion esauriente des carateristichis e des proprietâts dal indiç di Wald e je stade proponude di Ulmer, Benedetti e Banerjee. Cfr. M.J. Ulmer, *The economic theory of cost of living index numbers*, Columbia University Press, New York, 1949, pp. 81-93; C. Benedetti (1962), op. cit., pp. 72-74 e K.S. Banerjee, *Cost of living index numbers*, Marcel Dekker, New York, 1975.
[71] Il concet di utilitât margjinâl aplicade ai numars indiçs al è stât proponût pe prime volte di C. Gini che al à marcât che ancje se al è un cualsisei scambi jenfri monede e bens e/o servizis, l'element che al sta pardabon ae base di dutis lis transazions e che al è il feriment par formulâ un judizi su la convenience di une operazion economiche e je la utilitât dal ben o dal servizi ogjet di scambi. Il podê di acuist de monede, par chel che si à dit, al è misurât de cuantitât fisiche di ben che une unitât di monede e pues comprâ, intant che il podê economic di acuist de monede al è dât de utilitât economiche dal ben o dal servizi che la unitât monetarie e permet di otignî e duncje de utilitât margjinâl moltiplicade pes cuantitâts compradis. Cfr. C. Gini (1924), op. cit.
[72] Par definî il so indiç «vêr» dal cost de vite, Wald al ipotize che $q^*_t$ si cjati intun intor di $q_t$ di mût che si verifichi $\sum_h p_{bh}\, q_{th} = \sum_h p_{bh}\, q_{bh}$ intant che $\sum_h p_{th}\, q_{th} = \sum_h p_{th}\, q_{bh.}$
[73] Cemût che si sa, Frisch cul metodi de «dople spese» al rive a otignî i stes risultâts di Konüs doprant un resonament contrari che al partìs de ipotesi che la funzion di utilitât dal consumadôr razionâl e sedi cuadratiche e svilupabil in serie di Taylor. Cfr. R. Frisch (1936), op. cit.
[74] Si viodi par esempli: W.E. Diewert, *Exact and superlative index numbers*, in «Journal of Econometrics», vol. IV, 1976, pp. 115-145.
[75] Cemût che si sa, i prins tentatîfs par cirî une reinterpretazion dai numars indiçs dai presits de metodiche distributive e di chê agregative in clâf funzionâl a son stadis fatis di Konüs tal 1958. Cfr. A.A. Konüs, *Consumer price indexes and demand*

*functions*, in «Review of the International Statistical Institute», vol. XXVI, n. 1-3, 1958, pp. 29-36.
[76] La reinterpretazion in clâf funzionâl dai indiçs de metodiche distributive e di chê agregative midiant des relazions di conversion, fale tai câs degjeners o particolârs, e individue i ponts di tangjence dal plan de spese cu la estension di indiference. In plui de determinazion di cheste estension, par che si vedi un indiç «vêr» bisugne che la estension stesse e sedi convesse viers i as positîfs des cuantitâts, lant a individuâ cussì i vetôrs-cuantitât otimâi. Si viodi par esempli: C. Benedetti, *Ricerche su un tipo generalizzato di indice del costo della vita*, in «Metron», vol. XXVII, n. 3-4, 1969, pp. 3-40.
[77] L'indiç proponût di Dudot al veve par fin la dimostrazion che la incressite des tassis vie pal ream di Luigi XIV e jere plui aparente che reâl e a poie de sô tesi, dopo di vêju rindûts omogjeneis in maniere cualitative, al à confrontât i redits totâi di Luigi XII, Francesco I, Enrico II, Carlo III e Luigi XV. Cfr. T. Dutot, *Reflections politiques sur les finances et le commerce*, Prevost, Aja, 1738.
[78] Considerant h bens di consum, se $(q_1, q_2, \ldots, q_h)$ a indichin lis cuantitâts rispetivis ancjemò no fissadis ma compatibilis cul vincul di belanç di un consumadôr razionâl, il vetôr $b = (b_1, b_2, \ldots, b_h)^1$ al rapresente lis cuantitâts dai $h$ bens che a risultin jessi «ideâi» ma che no si rive a comprâju parcè che il redit disponibil nol è suficient. Al sarà duncje $0 \leq q_h < b_h$ ricuardant che tal câs dal indiç di Dutot lis $b_h$ a son dutis compagnis tra di lôr. Par altris aprofondiments, si viodi par esempli: C. Benedetti (1969), *op. cit.*, C. Benedetti, *Vecchi e tradizionali indici dei prezzi ricondotti a moderni indici funzionali a costante utilità*, in «Metron», vol. XXX, n. 1-4, 1972, pp. 67-86 e A. Gardini, *Alcune considerazioni sui fondamenti economici dei numeri indici dei prezzi*, in «Atti della XXXII Riunione Scientifica della Società Italiana di Statistica», vol. II, Sorrento, 1984, pp. 383-394.
[79] W. Leontief, *Composite commodity and the problem of the index numbers*, in «Econometrica», vol. IV, 1936, pp. 39-59.
[80] Une soluzion che e meti adun i problemis che a nassin cuant che a une stesse formule di calcul e corispuint plui di une teorie di compuartament dal consumadôr e je stade proponude di Diewert cu la introduzion dai indiçs superlatîfs che a costituissin une ripropueste in ambit economic di indiçs cu lis carateristichis dal indiç «ideâl» di Fisher. Si viodi: W.E. Diewert (1981), op. cit.
[81] La ricercje di gjeneralizazions midiant di formulis aprossimadis no je specificade de impostazion dade di Dieweert tal 1976, parcè che la estension in serie di Taylor de funzion di utilitât e la definizion di indiçs corispondents dai presits aprossimâts e jere une metodologjie cetant doprade a tacâ dai agns Vincj, cuant che Bowley (1928) al rigjavà un indiç ponderât cu lis cuantitâts mediis consumadis in doi periodis.
[82] L'indiç di Fisher al gjolt di une altre proprietât rispiet ai altris indiçs «superlatîfs» parcè che al è l'unic coerent cu la teorie des preferencis rigjavadis indicant in maniere corete la variazion dai presits e des cuantitâts ancje se la funzion di preference no je omotetiche. Si viodi par esempli: W.E. Diewert (1976), op. cit.

## Bibliografie

Allen R.G.D. (1963). Price index numbers. *Review of the International Statistical Institute*, XXXI, 3: 281-306.
Allen R.G.D. (1975). *Index numbers in theory and practice*. New York: Mac Millan.
Banerjee K.S. (1961). A factorial approach to construction of true cost of living index and its application in studies of changing in national income. *Sankhya*, XXIII: 297-304.
Banerjee K.S. (1977). *On the factorial approach providing the true index of cost of living*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Banerjee K.S. (1975). *Cost of living index numbers*, New York: Marcel Dekker.
Benedetti C. (1962). Teorie e tecniche dei numeri indici. *Metron*, XXII (1-2): 55-62.
Benedetti C. (1965). Un modo di eludere la scelta a priori della funzione di soddisfazione nella costruzione di un indice del costo della vita purtuttavia basato su criteri ottimali. *Metron*, XXIV (1-4): 415-432.
Benedetti C. (1969). Ricerche su un tipo generalizzato di indice del costo della vita, *Metron*. XXVII, 3-4: 3-40.
Benedetti C. (1972). Vecchi e tradizionali indici dei prezzi ricondotti a moderni indici funzionali a costante utilità. *Metron*, XXX, 1-4: 67-86.
Benedetti C. (1984). Scambio di idee sui numeri indice e sulla probabilità con A.A. Konüs. *Metron*, XLII, 1-2: 445-495.
Bowley A.L. (1928). Notes on index numbers. *The Economic Journal*, XXXVIII (159, June 1928): 216-237.
Chisini O. (1928). Sul concetto di media. *Periodico di Matematiche*, II: 106-116.
Christensen L.R., Jorgenson D.W., Lau L.J. (1971). Conjugate duality and the trascendental logarithmic production function. *Econometrica* XXXIX, 3: 255-256.
Davies G.R. (1922). *Introduction to economic statistics*. New York: The century Co.
Diewert W.E. (1976). Exact and superlative index numbers. *Journal of Econometrics*, IV: 115-145.
Diewert W.E. (1981). The economic theory of index numbers: a survey. In A. Deaton (Ed) *Essays in the theory and measurement of consumer behavior*. London: Cambridge University Press, pp. 163-208.
Divisia F. (1925-1926). L'indice monétaire et la théorie de la monnaie. *Revue d'économie politique*, 39 (julliet-aoùt 1925): 842-861; (septembre-octobre 1925): 980-1008; (novembre-decembre 1925): 1121-1151; 40 (janvier-fevrier 1926): 49-81.
Edgeworth F.Y. (1925). The plurality of index numbers. *Economic Journal*, 35: pp. 379-388.
Drechsler L (1973). Weighting of index numbers in multilateral international comparisons. *The Review of Income and Wealth*, series 19, 1: 17-34.
Dutot T (1738). *Reflections politiques sur les finances et le commerce*. Aja: Prevost, Aja.
Eichhorn W., Voeller J. (1976). *Theory of the price index*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer.
Eichhorn W. (1976). Fisher's tests revisited. *Econometrica*, 44: 247-256.
Eicchorn W., Henn R., Opitz O., Shephard R.W. (1978). *Theory and applications of economic indices.* Würzburg: Phisica.
Faleschini L. (1951). Sui miscugli di distribuzioni gaussiane. *Rivista Italiana di Economia, Demografia e Statistica*, V, 1-2: 30-47.
Faleschini L. (1956). Sulla forma delle distribuzioni dei prezzi relativi. *L'industria*, 1: 3-12.
Faliva M. (1973). Indici dei prezzi periodali. *Rivista Internazionale di Scienze Sociali*, pp. 37-46.

Fisher I. (1911). *The purchasing power of money*. New York: Mac Millan.
Fisher I. (1921). The best form of index number. *Quarterly Publications of the American Statistical Association*, March 1921: 533-551.
Fisher I. (1922). *The making of index numbers*. Boston: Houghton Mifflin.
Forsyth F.G., Fowler R.F. (1981). The theory and practice of chain price index numbers. *Journal of Royal Statistical Society*, series A, CXLIV: 224-246.
Frisch R. (1930). Necessary and sufficient conditions regarding the form of an index number which shall meet certain of Fisher's test. *Journal of the American Statistical Association*, XXV, December 1930: 397-406.
Frisch R. (1936). Annual survey of general economic theory: the problem of index numbers. *Econometrica*, IV, 1: 1-38.
Gardini A. (1984). Alcune considerazioni sui fondamenti economici dei numeri indici dei prezzi. *Atti della XXXII Riunione Scientifica della Società Italiana di Statistica*, II. Sorrento, pp. 383-394.
Gini C. (1924). Quelques considérations au sujet de la construction des nombres indices des prix et des questions analogues, *Metron,* IV (1): 3-162 .
Haberler G. (1927). *Der Sinn der Indexzahlen. Eine Untersuchuns über den Begriff des Preisniveaus und die Methodes seiner Messung*. Tübingen.
Jevons W.S. (1884). A serious fall in the value of gold ascertained and its social effects. In Jevons W.S, *Investigation in currency and finance*, London: Mac Millan.
Jevons W.S. (1884). The variation of prices and the value of the currency since 1782. In Jevons W.S, *Investigation in currency and finance*. London: Mac Millan.
Kloek T., De Wit G.M. (1961). Best linear unbiased index numbers. *Econometrica*, XXIX, 4: 602-616.
Kolmogorov A. (1930). Sur la notion de moyenne. *Rendiconti dei Lincei*, II sem., 9.
Konüs A.A. (1939). The problem of the true index of the cost of living. *Econometrica*, VII: 10-29.
Konüs A.A. (1958). Consumer price indexes and demand functions. *Review of the International Statistical Institute*, XXVI, 3: 29-36.
Laspeyres E. (1871). Die Berechnung einer mittleren Warenpressteigerung. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 16: 296-871.
Leontief W. (1936). Composite commodity and the problem of the index numbers. *Econometrica*, IV: 39-59.
Lowe J. (1822). *The present state of England*. London.
March L. (1923). Les indices économiques. *Metron*, III, 2: 334-362.
Marshall A. (1923). *Money, credit and commerce.* London.
Martini M. (1992). *I numeri indice in un approccio assiomatico,* Milano: Giuffrè.
Mastrodonato A. (1973). La distribuzione dei prezzi relativi in Italia dal 1966 al 1970, *Rivista Italiana di Economia, Demografia e Statistica*», XXVII, ottobre-dicembre:149-182.
Mitchell W.C. (1921). The making and using of index numbers. Bullettin n. 284. Washington: U.S. Bureau of Labor Statistics.
Olivier M. (1927). *Les nombres indices de la variation des prix*. Paris: Giard.
Nagumo M. (1930). Note. *Japanese Journal of Mathematics*, VI, 1: 71.
Paasche H. (1874). Über die Preisentwicklung der letzten Jahre, nach den Hamburger Börsenentwicklungen. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 23: 168-178.
Pfouts R. (1966). An axiomatic approach to index numbers. *Review of the International Statistical Institute*, XXXIV, 2: 174-185.
Pigou A.C. (1912). *Wealth and welfare*. London: Macmillan.

Quintano C. (1974). Gli indici dei prezzi (o di quantum) di tipo aggregativo e gli indici sintetici basati su modelli regressivi. *Studi Economici*, 2: 109-123.
Rondini R. (1958). Significato e validità della ripartizione del reddito nazionale italiano secondo province e regioni. *Bancaria*: 534-541.
Roy R. (1949). Les nombres indices. *Journal de la Societé de Statistique de Paris*, janvier-février: 15-34.
Saibante M. (1950). Contributo alle ricerche sulla dispersione delle variazioni dei prezzi, loro significato. *Atti della IX Riunione della Società Italiana di Statistica*, pp. 281-296.
Samuelson P. (1973). *Fondamenti di analisi economica.* Milano: Il Saggiatore.
Samuelson P., Swamy S. (1974). Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis. *The American Economic Review*, LXIV, 4: 566-593.
Sato K. (1976). The ideal log-change index numbers. *The Review of Economics and Statistics*, LVIII, 2: 223-228.
Sato K. (1976). The meaning and measurement of the real value added index. *The Review of Economics and Statistics*, LVIII, 4: 434-442.
Stuvel G. (1957). A new index number formula. *Econometrica*, XXV, 1: 123-131.
Swamy S. (1965). Consistency of Fisher's tests. *Econometrica*, XXXIII, 3: 619-623.
Tenderini D. (1934). Il significato teorico e pratico degli indici dei prezzi. *Rivista Italiana di Statistica, Economia e Finanza*, VI: 269-331, 426-506, 734-772.
Theil H. (1960). Best linear index numbers of prices and quantities. *Econometrica*, XXVIII, 2: 464-480.
Törnqvist L. (1936-1937). The consumption price index of the bank of Finland. *Bank of Finland Monthly Bullettin*, 10 (1936): 1-8; 11 (1937): 73-95.
Uggè A. (1946). *I numeri indici dei prezzi*. Milano: Giuffrè.
Ulmer M.J. (1949). *The economic theory of cost of living index numbers*. New York: Columbia University Press.
Vartia Y.O. (1976). Ideal log-change index numbers. *Scadinavian Journal of Statistics*, III: 121-126.
Vartia Y.O. (1976). *Relative changes and index numbers*. Helsinki: The Research Institute of the Finnish Economy.
Von Bortkiewicz L.W. (1923). Zweck und Struktur einer Preisindexzahl. *Nordisck Statistiks Tidskrift*: 395 e seguitivis.
Wald A. (1937). Zür Theorie der Preisindexziffern. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 8: 179-219.
Wald A. (1939). A new formula for the index of cost of living. *Econometrica*, VII, 4: 319-331.
Walsh C. (1901). *The measurement of general exchange value*. New York: Macmillan.
Walsh C. (1921). *The problem of estimation*. London: P.S. King and Son.
Wold H. (1953). *Demand analisys.* New York: Wiley.
Young A. (1921). The measurement of changes of the general price level. *The Quarterly Journal of Economics*, XXXV, 4: 557–573.