Gjornâl Furlan des Siencis **18.** 2014, 47-56

Costruzion esate di trâfs cun carics di ponte predefinîts

ANTONINO MORASSI*

Ristret. L'articul al ilustre un procediment analitic pe costruzion esate di trâfs di Eulêr-Bernoulli cun valôrs assegnâts pai prins N carics di ponte. Il risultât si apliche a trâfs incernierâts aes estremitâts e a trâfs cun rigjidece flessionâl costante. La analisi si fonde suntune riduzion dal probleme di stabilitât a un probleme ai autovalôrs par une cuarde vibrante, e e dopre risultâts resints su la costruzion di operadôrs di Sturm-Liouville cun frecuencis naturâls assegnadis.

Peraulis clâf. Carics di ponte, trâfs, Leme di Darboux, operadôrs cuasi-isospetrâi, problemis inviers.

1. Introduzion. Intun lavôr resint (Caliò et al., 2011) i autôrs a àn mostrât cemût costruî fameis di trâfs di Eulêr-Bernoulli che a vedin la stesse secuence infinide di carics di ponte rispiet a un dât trâf cun vincui tes estremitâts specificâts. Chescj trâfs a son stâts clamât *isobuckling,* ven a dî cun ducj i carics di ponte compagns.

La ricercje svilupade in (Caliò et al., 2011), dut câs, no à sclarît se al sedi pussibil costruî un trâf di Eulêr-Bernoulli che al vedi valôrs assegnâts precîs pai prins N carics di ponte. In cheste note o intindìn dâ une rispueste positive ae domande parsore e, sot ciertis cundizions, o presentìn un procediment costrutîf esplicit par risolvi il probleme inviers.

Il nestri risultât al è valit par trâfs incernierâts aes estremitâts, cun caric assiâl di compression costant e coeficient di rigjiditât che al varie secont une funzion regolâr. La analisi si fonde suntune riduzion dal

*Dipartiment di Inzegnerie Civîl e Architeture, Universitât dal Friûl, Udin, Italie. Email: antonino.morassi@uniud.it

probleme di stabilitât a un probleme ai autovalôrs ecuivalent par une classe di cuardis fissadis ai doi cjaveçs, e e adate risultâts resints su la costruzion precise di operadôrs di Sturm-Liouville in forme canoniche cun frecuencis naturâls assegnadis, cfr. (Morassi, 2015). In particolâr, il strument matematic principâl si fonde suntun classic leme di Darboux (Darboux, 1882), che al permet di costruî in forme esplicite fameis di operadôrs di Sturm-Liouville che a condividin i stes autovalôrs di un operadôr di Sturm-Liouville dât, cu la ecezion di un unic autovalôr che al è libar di movisi intun interval assegnât. Chescj operadôrs a son clamâts *operadôrs cuasi-isospetrâi*. Cun di plui, la analisi ilustrade in (Morassi, 2015) e je doprade par determinâ cuardis corispondentis ai operadôrs cuasi-isospetrâi di Sturm-Liouville e, ae fin, par cjatâ trâfs *cuasi-isobuckling* rispiet a un ciert trâf dât.

2. Instabilitât elastiche di un trâf e probleme di cuardis ecuivalent. Considerìn un trâf elastic dret e sutîl sogjet a un caric assiâl di compression costant P, $P > 0$. Il probleme di stabilitât al è guviernât de ecuazion di Eulêr-Bernoulli-Kirchhoff (cfr. (Love, 1944))

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right) + P\frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0, \quad x \in (0, L), \tag{2.1}$$

dulà che $v = v(x)$ al è il spostament laterâl dal as dal trâf te sezion de absisse x valutât tal plan principâl di curvadure. Inte ecuazion (2.1), E al è il modul di Young dal materiâl, $E = costant > 0$, e $I = I(x)$ al è il moment di inerzie de sezion dal trâf riferît a un as principâl che al passe pal baricentri de sezion. In particolâr si ocuparìn di trâfs dulà che $I(x)$ al è une funzion simpri positive, diferenziabile cun continuitât fint al secont ordin, di x in $[0, L]$, vâl a dî

$$I(x) \geq I_0 > 0, \quad x \in [0, L], \quad I \in C^2([0, L]). \tag{2.2}$$

Suponìn che il trâf al sedi incernierìât aes estremitâts (*Pinned-Pinned*, P-P). Il probleme di stabilitât al consist tal risolvi il probleme ai autovalôrs

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}\left(I(x)\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right) + \lambda^2\frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0, \quad x \in (0, L), & (2.3) \\ v(0) = \frac{d^2v(0)}{dx^2} = 0, & (2.4) \\ v(L) = \frac{d^2v(L)}{dx^2} = 0, & (2.5) \end{cases}$$

dulà che

$$\lambda^2 = \frac{P}{E}. \tag{2.6}$$

Cun chestis ipotesis, e je une secuence di carics di ponte $\{P_m = \lambda_m^2 E\}_{m=1}^{\infty}$ cun

$$0 < P_1 < P_2 < ..., \quad \lim_{m\to\infty} P_m = \infty, \tag{2.7}$$

di mût che (2.3)–(2.5) a àn une soluzion no banâl $v_m = v_m(x)$, $m \geq 1$. Cheste secuence e je il *spetri di instabilitât* dal trâf incernierât e o scrivìn

$$\{\lambda_m^2\}_{m=1}^{\infty} = \mathtt{BSp}(I(x); P - P). \tag{2.8}$$

La proposizion chi sot e aferme la ecuivalence jenfri il probleme ai autovalôrs (2.3)–(2.5) e il probleme de vibrazion libare di une famee di cuardis tiradis.

Proposition 2.1:
Se $\{\lambda^2, v(x)\}$ *e je une autocubie di* (2.3)–(2.5) *dulà che* $I = I(x)$ *ai sodisfe* (2.2)*, alore* $\{\lambda^2, v(x)\}$ *e je une autocubie di*

$$\begin{cases} \frac{d^2v(x)}{dx^2} + \lambda^2\rho(x)v(x) = 0, \quad x \in (0, L), & (2.9) \\ v(0) = 0 = v(L), & (2.10) \end{cases}$$

cun

$$\rho(x) = \frac{1}{I(x)}, \quad x \in [0, L]. \tag{2.11}$$

Vice versa, se $\{\lambda^2, v(x)\}$ *e je une autocubie di* (2.9)–(2.10)*, alore* $\{\lambda^2, v(x$ *e je une autocubie di* (2.3)–(2.5)*.*

Il probleme ai autovalôrs (2.9)–(2.10) al descrîf la vibrazion libare, infinitesimâl, trasversâl di amplece $v = v(x)$ di une cuarde di frecuence λ e densitât di masse $\rho = \rho(x)$, $\rho \in C^2([0, L])$ e $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ in $[0, L]$. La cuarde e je tirade cun tension unitarie, e à lungjece L e e je fissade ai doi cjaveçs. Dimostrazion de Proposizion (2.1) e je presentade in (Caliò et al., 2011) (Proposizion 1).

3. Costruzion di trâfs cun carics di ponte assegnâts. Ponìn che n, $n \geq 1$, al sedi assegnât. La nestre metodiche si fonde su la costruzion esplicite di un gnûf trâf incernierât P-P cuasi-isobuckling rispiet al trâf dât, ven a stâi un trâf cun $I = I(x)$ che al vedi chei stes carics di ponte dal trâf dât $\widehat{I} = \widehat{I}(x)$, cu la ecezion dal caric di ponte n-esim. Di fat, mantignint fis ducj i autovalôrs λ_m^2 cun $m \neq n$ e movint l'autovalôr n-esim λ_n^2 al valôr desiderât, che o clamarìn $\widetilde{\lambda}_n^2$, e ripetint la procedure plui voltis, dopo N pas o varìn costruît un trâf cui prins N autovalôrs assegnâts $\{\widetilde{\lambda}_m^2\}_{m=1}^N$ e la costruzion e sarà completade.

I pas principâi de costruzion di trâfs incernierâts P-P cun $I = I(x)$, cuasi-isobuckling rispiet a un trâf incernierât dât cun $\widehat{I} = \widehat{I}(x)$, a son indicâts chi sot.

Pas 1. Il probleme ai autovalôrs de cuarde (2.9)–(2.10) al è ridusût ae forme canoniche di Sturm-Liouville cuntun potenziâl di Schrödinger $\widehat{q}$ (cfr. Sezion 3.1).

Pas 2. Il Leme di Darboux (cfr. Zonte) al è doprât par costruî fameis esplicitis di potenziâi di Schrödinger q cuasi-isospetrâi al potenziâl iniziâl $\widehat{q}$ (cfr. Sezion 3.2).

Pas 3. Il Leme di Darboux al è doprât une seconde volte in forme iterade par cjatâ densitâts di masse des cuardis corispondentis ai potenziâi cuasi-isospetrâi q (cfr. Sezion 3.3).

Pas 4. In fin, la ecuivalence afermade te Proposizion 2.1 e je doprade par cjatâ trâfs incernierâts P-P $I = I(x)$ cuasi-isobuckling rispiet al trâf incernierât iniziâl cun $\widehat{I} = \widehat{I}(x)$ (cfr. Sezion 3.4).

I pas 1-4 a saran analizâts tes sotsezions seguitivis.

3.1 Riduzion ae forme canoniche. Che al sedi assegnât un trâf incernierât (P-P) cun $\widehat{I} = \widehat{I}(x)$, che al sodisfi lis cundizions (2.2). Il spetri di instabilitât di chest trâf al è $\{\widehat{\lambda}_m^2\}_{m=1}^\infty = \mathtt{BSp}(\widehat{I}(x); P - P)$. Indichìn cun $\{\widehat{\rho}(x)\}$ la cuarde corispondente fissade aes estremitâts (F-F) come definide te Proposizion 2.1, cuntun spetri $\{\widehat{\lambda}_m^2\}_{m=1}^\infty = \mathtt{Sp}(\widehat{\rho}(x); F - F)$. La trasformazion di Liouville

$$\xi(x) = \frac{1}{\widehat{p}} \int_0^x (\widehat{\rho}(s))^{1/2} ds, \quad \widehat{p} = \int_0^L (\widehat{\rho}(s))^{1/2} ds, \tag{3.1}$$

$$y(\xi) = \widehat{a}(\xi) v(x), \quad \widehat{a}^4(\xi) = \frac{L^2}{\widehat{p}^2} \widehat{\rho}(x), \tag{3.2}$$

e ridûs il probleme ai autovalôrs (2.9)–(2.10) (cun ρ rimplaçât di $\widehat{\rho}$) par $\{\widehat{\lambda}^2, v(x)\}$ ae forme canoniche di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \frac{d^2y(\xi)}{d\xi^2} + \widehat{\mu}y(\xi) = \widehat{q}(\xi)y(\xi), \quad \xi \in (0,1), & (3.3) \\ y(0) = 0 = y(1), & (3.4) \end{cases}$$

dulà che l'autovalôr $\widehat{\mu}$ e il potenziâl $\widehat{q}(\xi)$, $\widehat{q} \in C^0([0,1])$ a son definîts tant che

$$\widehat{\mu} = \widehat{p}^2\widehat{\lambda}^2, \quad \widehat{q}(\xi) = \frac{1}{\widehat{a}(\xi)}\frac{d^2\widehat{a}(\xi)}{d\xi^2}, \quad \xi \in (0,1). \tag{3.5}$$

3.2 Potenziâi cuasi-isospetrâi. Lant daûr de analisi svilupade in (Pösche & Trubowitz, 1987), si puedin costruî in maniere esplicite fameis di operadôrs di Sturm-Liouville $L = -\frac{d^2}{d\xi^2} + q(\xi)$, cun potenziâl $q(\xi)$ cuasi-isospetrâl al potenziâl $\widehat{q}(\xi)$ sot cundizions al contor di Dirichlet. La analisi si fonde sul Leme di Darboux descrit te Zonte; chi o ricuardìn dome il risultât principâl. Introdusìn cualchi notazion. Che n, $n \geq 1$ al sedi un numar dât e $t \in \mathbb{R}$ al sedi tâl che

$$\mu_{n-1}(\widehat{q}) < \mu_n(\widehat{q}) + t < \mu_{n+1}(\widehat{q}), \tag{3.6}$$

cun $\mu_0(\widehat{q}) = 0$. Indichìn cun δ_{ij} il simbul di Kronecker. Par $\mu \in \mathbb{C}$, ponìn che $y_i = y_i(\xi, \widehat{q}, \mu)$, $i = 1, 2$ e sedi la soluzion al probleme di valôr iniziâl

$$\begin{cases} y_i'' + \mu y_i = \widehat{q}y_i, \qquad x \in (0,1), & (3.7) \\ y_i(0) = \delta_{i1}, & (3.8) \\ y_i'(0) = \delta_{i2}, & (3.9) \end{cases}$$

e indichìn cun $w_n = w_n(\xi, \widehat{q}, \mu)$ la soluzion a

$$\begin{cases} w_n'' + \mu w_n = \widehat{q}w_n, \qquad \xi \in (0,1), & (3.10) \\ w_n(0) = 1, & (3.11) \\ w_n(1) = y_1(1, \mu_n, \widehat{q}), & (3.12) \end{cases}$$

par $\mu \neq \mu_n$ (notìn che la funzion w_n e à une singolaritât rimovibile cun $\mu = \mu_n$). Che al sedi

$$\omega_n(\xi, \widehat{q}, \mu) = w_n(\xi, \widehat{q}, \mu)\frac{dz_n(\xi, \widehat{q})}{d\xi} - \frac{dw_n(\xi, \widehat{q}, \mu)}{d\xi} z_n(\xi, \widehat{q}) \qquad (3.13)$$

dulà che z_n e je la autofunzion n-esime di (3.3)–(3.4) e $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{d\xi}$. Par ogni $\widehat{q} \in C^0([0,1])$, la funzion $\omega_n = \omega_n(\xi, \widehat{q}, \mu)$, $n \geq 1$, e je une funzion continue e simpri positive par $[0,1] \times (\mu_{n-1}(\widehat{q}), \mu_{n+1}(\widehat{q}))$. Cun di plui, ω_n e je une funzion C^2de variabile ξ in $[0,1]$; cfr. (Pöschel & Trubowitz, 1987). O definìn $w_{n,t} = w(\xi, \widehat{q}, \mu_n + t)$ e $\omega_{n,t} = \omega(\xi, \widehat{q}, \mu_n + t)$.

Daûr de notazion parsore, par ogni dât n, $n \geq 1$, e cun t che al sodisfe la (3.6), si pues dimostrâ che il potenziâl

$$q(\xi) = \widehat{q}(\xi) - 2\frac{d^2}{d\xi^2}(\ln \omega_{n,t}(\xi)) \qquad (3.14)$$

al à ducj i stes autovalôrs dal potenziâl $\widehat{q}(\xi)$, cu la ecezion dal autovalôr n-esim, che al à un valôr $\mu_n(q) = \mu_n(\widehat{q}) + t$. Cun di plui, lis autofunzions $\{k_{m,t}\}_{m=1}^{\infty}$ associadis a $q(\xi)$ a àn chestis espressions esplicitis

$$k_{m,t} = z_m - t\frac{w_{n,t}}{\omega_{n,t}} \int_0^{\xi} z_m(s) z_n(s) ds, \quad \text{par } m \geq 1,\ m \neq n, \qquad (3.15)$$

$$k_{n,t} = \frac{z_n}{\omega_{n,t}}. \qquad (3.16)$$

3.3 Cuardis cuasi-isospetrâls. I autovalôrs $\{\widehat{\mu}_m\}$ di (3.3)–(3.4) a àn la forme asintotiche

$$\widehat{\mu}_m = (m\pi)^2 + \widehat{O}(1), \quad \text{par } m \to \infty, \qquad (3.17)$$

cun $\widehat{O}(1)$ grandece limitade par $m \to \infty$. Duncje, se lis dôs cuardis $\{\widehat{\rho}(x)\}$ e $\{\rho(x)\}$ a son cuasi-isospetrâls, vâl a dî $\widehat{\lambda}_m^2 = \lambda_m^2$ par ogni $m \neq n$, dulà che $n \geq 1$ al è un numar dât, alore, par m grant,

$$\widehat{p}^2\widehat{\lambda}_m^2 = (m\pi)^2 + \widehat{O}(1), \quad p^2\lambda_m^2 = (m\pi)^2 + O(1), \qquad (3.18)$$

di mût che

$$\widehat{p}^2 = p^2. \qquad (3.19)$$

Cumò, par cjatâ une cuarde fissade $\{\rho(x)\}$ cuasi-isospetrâl a une cuarde fissade dade $\{\widehat{\rho}(x)\}$, o vin prin di cjatâ une funzion $a = a(\xi)$ corispondente al gnûf potenziâl cuasi-isospetrâl $q = q(\xi)$ dât di (3.14), ven a jessi

$$\frac{d^2 a(\xi)}{d\xi^2} = q(\xi)a(\xi), \tag{3.20}$$

cun $a = a(\xi)$ dal stes segn in $[0, 1]$. Une dople aplicazion dal Leme di Darboux e puarte a cheste espression esplicite par a:

$$a(\xi) = \widehat{a}(\xi) - t\frac{w_{n,t}(\xi)}{\mu_n \omega_{n,t}(\xi)}[z_n, \widehat{a}](\xi), \qquad n \geq 1, \tag{3.21}$$

che si viodi (Morassi, 2015) pai detais. In particolâr, si pues dimostrâ che $a = a(\xi)$ dade de (3.21) e je une funzion C^2dal stes segn in $[0, 1]$ par ogni t che al sodisfi la (3.6).

Par completâ la costruzion di cuardis cuasi-isospetrâls, o invertìn la trasformazion di Liouville (3.1)–(3.2), ven a dî

$$x(\xi) = \frac{L}{K}\int_0^\xi \frac{ds}{a^2(s)}, \quad K = \int_0^1 \frac{ds}{a^2(s)}, \tag{3.22}$$

$$v(x) = \frac{y(\xi)}{a(\xi)}, \quad \rho(x) = \frac{\widehat{p}^2 K^2}{L^2} a^4(\xi), \tag{3.23}$$

e il probleme ai autovalôrs di Sturm-Liouville (3.3)–(3.4) (cun $\widehat{q}(\xi)$ rimplaçât di $q(\xi)$) al è trasformât di gnûf intun probleme ai autovalôrs de cuarde

$$\begin{cases} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \lambda^2 \rho(x) v(x) = 0, \quad x \in (0, L), & (3.24) \\ v(0) = 0 = v(L). & (3.25) \end{cases}$$

Di conseguence, lis dôs cuardis $\{\widehat{\rho}(x)\}$, $\{\rho(x)\}$ de stesse lungjece L, fissadis aes estremitâts e sogjetis a tension unitarie, a son cuasi-isospetrâls. Cun plui precision, assegnât un numar n, $n \geq 1$, o varìn $\lambda_m^2(\widehat{\rho}(x)) = \lambda_m^2(\rho(x))$ par ogni $m \geq 1$, $m \neq n$, e l'autovalôr n-esim $\lambda_n^2(\rho(x))$ al è leât a $\lambda_n^2(\widehat{\rho}(x))$ par mieç di (3.6).

3.4 Costruzion di trâfs cuntun numar finît di carics di ponte. In cheste sezion o completarìn la dimostrazion dal risultât principâl dal articul. La analisi e va daûr di chê svilupade in (Morassi, 2015) (Sezion 5) pe determinazion di fameis di trâfs cun frecuencis naturâls assegnadis.

Considerìn un trâf incernierât cun $I_0 = I_0(x)$ e carics di ponte $\{\lambda_m^2(I_0)\}_{m=1}^{\infty}$ (par esempli, autovalôrs di (2.3)–(2.5) cun $I(x)$ rimplaçât di $I_0(x)$). A partî di chest trâf incernierât, o intindìn costruînt un secont che al vedi valôrs assegnâts pai prins N, $N \geq 1$, carics di ponte $\{\widetilde{\lambda}_m^2\}_{m=1}^{N}$, cun

$$0 < \widetilde{\lambda}_1^2 < \widetilde{\lambda}_2^2 < ... < \widetilde{\lambda}_N^2 \ . \tag{3.26}$$

Seguint la analisi des sezions precedents, a partî dal trâf $I_0(x)$ o costruìn un altri trâf $I_1(x)$ di mût che $\lambda_m^2(I_1) = \lambda_m^2(I_0)$ par $m \geq 2$, e che $\lambda_1^2(I_1)$ al coincidi cul valôr desiderât $\widetilde{\lambda}_1^2$. In particolâr, indicant cun $a_0(\xi)$ la funzion $\widehat{a}(\xi)$ che e comparìs in (3.2) (e che e corispuint al prin trâf $I_0(x)$), la funzion $a_1 = a_1(\xi)$ associade al gnûf trâf $I_1(x)$ e je dade di (3.21):

$$a_1(\xi) = a_0(\xi) - t\frac{w_{1,t}(\xi)}{\mu_1(I_0)\omega_{1,t}(\xi)}[z_1(I_0), a_0](\xi) \tag{3.27}$$

dulà che lis funzions $w_{1,t}(\xi)$, $\omega_{1,t}(\xi)$ a son definidis, tal ordin, in (3.10)–(3.12), (3.13), cun $\widehat{q}(\xi)$ rimplaçât di $\widehat{q}_0(\xi) = \frac{1}{a_0(\xi)}\frac{d^2a_0(\xi)}{d\xi^2}$. In plui, μ_m e λ_m a son leadis tant che in (3.5), e t e sodisfe (3.6). Se $\widetilde{\mu}_1 < \mu_2(I_0)$, o podìn rigjavâ t, par esempli $t = t_1$, di mût che $\mu_1(I_1) = \widetilde{\mu}_1$. Il gnûf trâf $I_1(x)$ al à carics di ponte (o autovalôrs) $\{\widetilde{\lambda}_1^2, \lambda_2^2(I_0), \lambda_3^2(I_0), ...\}$, cun $0 < \widetilde{\lambda}_1^2 < \lambda_2^2(I_0) < \lambda_3^2(I_0) < ...$, e al pues jessi doprât come pont di partence pal prossim pas de costruzion.

Ripetint i resonaments parsore, e tratant che $\widetilde{\mu}_2 < \mu_3(I_0)$, o podìn modificâ I_1 in maniere di mantignî $\lambda_m^2(I_1)$ fisse par $m \neq 2$ e movi $\lambda_2^2(I_1)$ al valôr desiderât $\widetilde{\lambda}_2^2$, cjapant

$$a_2(\xi) = a_1(\xi) - t_2\frac{w_{2,t_2}(\xi)}{\mu_2(I_1)\omega_{2,t_2}(\xi)}[z_2(I_1), a_1](\xi), \tag{3.28}$$

dulà che

$$t_2 = \widetilde{\mu}_2 - \mu_2(I_0). \tag{3.29}$$

I carics di ponte dal trâf incernierât $I_2(x)$ (associâts a $a_2(\xi)$) a son duncje $\{\widetilde{\lambda}_1^2, \widetilde{\lambda}_2^2, \lambda_3^2(I_0), \lambda_4^2(I_0), ...\}$. Rifasint cheste procedure plui voltis, dopo N

pas o varìn un trâf cun coeficient $I_N(x)$ tâl che

$$\lambda_m^2(I_N) = \widetilde{\lambda}_m^2, \qquad \text{par } 1 \leq m \leq N, \tag{3.30}$$

e la costruzion e je completade. Al è clâr che la sielte dal trâf iniiziâl $I_0(x)$ e je limitade des cundizions

$$\widetilde{\lambda}_1^2 < \lambda_2^2(I_0), \;\; \widetilde{\lambda}_2^2 < \lambda_3^2(I_0), \;\; ..., \;\; \widetilde{\lambda}_{N-1}^2 < \lambda_N^2(I_0), \;\; \widetilde{\lambda}_N^2 < \lambda_{N+1}^2(I_0), \tag{3.31}$$

che nus permetin di determinâ in maniere univoche i numars t_1, t_2, ..., t_N cun espressions analighis ae ecuazion (3.29).

O segnalìn che la costruzion parsore no je uniche, stant che il passaç dal trâf iniziâl I_0 a un trâf cun valôrs assegnâts pai prins N carics di ponte e dipent di in ce ordin che si movin i singui autovalôrs rispiet al valôr che si vûl rivâ. Sì che duncje, lis cundizions (3.31) tal prin trâf I_0 a puedin mudâ daûr de secuence dai cambiaments di autovalôr.

In fin, o rimarchìn che i resonaments fats fin cumò a puedin jessi adatâts a altris tipologjiis di vincui aes estremitâts. Di fat, daûr de Proposizion 2 di (Caliò et al., 2011), la ecuivalence tra il probleme di stabilitât dai trâfs e il probleme ai autovalôrs des cuardis afermade te Proposizion 2.1 e pues jessi slargjade a situazions dulà che un trâf, par esempli, al vedi a man çampe une estremitât incernierade e a man drete un vincul scorevul, par esempli, $\frac{dv}{dx}(L) = 0$ e $\frac{d}{dx}\left(I\frac{d^2v}{dx^2}\right)(L) = 0$. La corispondence e colegarà lis estremitâts incernierade e mobile dal trâf aes estremitâts, tal ordin, fisse e libare de cuarde.

4. Conclusions. In chest articul o vin considerât il probleme di cemût costruî trâfs di Eulêr-Bernoulli che a vedin valôrs assegnâts pai prins N carics di ponte, sot cundizions al contor specificadis. La analisi si fonde sul fat che il probleme di stabilitât par un trâf incernierât al è ecuivalent al probleme ai autovalôrs par une cuarde vibrante fissade aes estremitâts. Il pont clâf de procedure e je la determinazion des cuardis cuasi-isospetrâls, ven a dî cuardis cun densitât di masse diferente che a àn il stes spetri de cuarde di partence, cu la ecezion di un dât autovalôr che al è libar di variâ intun interval assegnât. Sistemis cuasi-isospetrâi a vegnin po dopo rigjavâts midiant de aplicazion apropriade di un Leme di Darboux, vint ridot la ecuazion de cuarde ae forme canoniche di Sturm-Liouville. La procedure di ricostruzion e domande che al sedi specificât un trâf iniziâl cun carics di ponte che a sodisfin ciertis cundizions di interrelazion cui carics di ponte assegnâts. Un aspiet teoretic ancjemò viert e che al valarès la pene di studiâ e je la caraterizazion dai trâfs sielzûts come pont di partence de procedure.

5. Zonte. In cheste zonte o ricuardìn il Leme di Darboux.

Lemma 5.1:
[(Darboux, 1882)] Che μ al sedi un numar reâl, e $g \equiv g(\xi)$ une soluzion no banâl de ecuazion di Sturm-Liouville

$$-g'' + \widehat{q}g = \mu g, \tag{5.1}$$

cun potenziâl continui $\widehat{q} \equiv \widehat{q}(\xi)$. Se f e je une soluzion no banâl di

$$-f'' + \widehat{q}f = \lambda f \tag{5.2}$$

e $\lambda \neq \mu$, alore

$$y = \frac{1}{g}[g, f] \equiv \frac{1}{g}(gf' - g'f) \tag{5.3}$$

e je une soluzion no banâl de ecuazion di Sturm-Liouville

$$-y'' + \check{q}y = \lambda y, \tag{5.4}$$

dulà che

$$\check{q} = \widehat{q} - 2(\ln(g(\xi)))''. \tag{5.5}$$

Cun di plui, la soluzion gjenerâl de ecuazion

$$-y'' + \check{q}y = \mu y \tag{5.6}$$

e je

$$y = \frac{1}{g}\left(b_1 + b_2\int_0^\xi g^2(s)ds\right), \tag{5.7}$$

dulà che b_1 e b_2 a son costantis arbitrariis. In particolâr, $y = \frac{1}{g}$ e je une soluzion di (5.6).

Si à di tignî presint che se g si anule in $[0, 1]$, alore la ecuazion (5.4) e je vere jenfri lis lidrîs di g. Chestis situazions particolârs si risolvin se si apliche il Leme di Darboux dôs voltis.